**شبیه‌سازی جریان سیال غیرنیوتنی با روش شبکه­بندی بولتزمن**

علی ارمند 1، زهرا منصورپور 2\*

1،2 دانشکده مهندسی شیمی، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

*mansourp@ut.ac.ir \**

**چکيده**

در سال‌های اخیر، روش شبکه‌بندی بولتزمن تبدیل به یک روش عددی قابل قبول برای شبیه‌سازی جریان سیال و مدلسازی هیدرودینامیک انواع سیالات به ویژه سیالات غیرنیوتنی شده است. شبیه‌سازی سیالات غیرنیوتنی به دلیل غیرخطی بودن رابطة نرخ کرنش و ویسکوزیته در آنها اغلب با چالش‌هایی همانند عدم همگرایی مسئله همراه می­باشند. در این پژوهش با غلبه بر چالش‌های پیش رو و به منظور بررسی قابلیت‌های روش شبکه­بندی بولتزمن، جریان سیال عبوری از حفره دو بعدی با دیواره متحرک را شبیه­سازی کردیم و نتایج حل عددی گزارش شده است. سیال مورد بررسی در این پژوهش سیال پاورلا بوده است. همچنین اثر عدد رینولدز و شاخص مدل پاورلا (n) را بر روی ساختار جریان و محل گردابه‌ها در حفره‌ مورد ارزیابی و همچنین اثر این پارامترها را بر روی نرخ کرنش و ویسکوزیته نیز مورد بررسی قرار داده شد.

**واژگان كليدي:**

روش شبکه‌بندی بولتزمن، سیالات غیرنیوتنی، سیال پاورلا، حفره دو بعدی با دیواره متحرک

# مقدمه

در مکانیک سیالات، سیالاتی که از قانون نیوتون پیروی نمی‌کنند را سیالات غیرنیوتنی می‌نامند. در قانون نیوتن بین تنش برشی و نرخ کرنش رابطه خطی وجود دارد یا به عبارتی ویسکوزیته ثابت است. اما در سیال غیرنیوتنی بین تنش برشی و نرخ کرنش رابطه‌ی غیرخطی وجود دارد. سیالات متنوعی در کاربردهای علوم و مهندسی به عنوان سیالات غیرنیوتنی به حساب می‌آیند که از این دسته میتوان به سیالاتی نظیر خمیرها، لجن‌ها، پلاستیک‌های مذاب، محلول‌های پلیمری، رنگ موها، لعاب‌ها، سوسپانسیون‌ها و همچنین برخی مایعات زیست‌پزشکی همانند خون اشاره کرد[1].

در سال‌های اخیر، برخی روش‌های پیشرفته و کاربردی برای شبیه‌سازی جریان سیالات غیرنیوتنی توسعه داده شد. از این روش‌ها میتوان به روش المان محدود[2]، روش حجم محدود[3] و روش ‌شبکه‌بندی بولتزمن[4] اشاره کرد. با کمک روش‌های مذکور، برخی از خصوصیات جریان پیچیده که با سیالات نیوتنی تفاوت داشتند گزارش شده است.

روش ‌شبکه‌بندی بولتزمن، روشی نوین بوده که ثابت شده است برای شبیه‌سازی‌های عددی جریان سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی پیچیده بسیار قدرتمند می‌باشد[5]. در مقایسه با سایر روش‌های سنتی، یکی از مزیت‌های روش ‌شبکه‌بندی بولتزمن این است که مقدار تانسور تنش میتواند به صورت محلی توسط تابع توزیع غیرتعادلی به دست آید[6]. بنابراین، روش ‌شبکه‌بندی بولتزمن یکی از روش‌های احتمالا خوب برای شبیه‌سازی سیالات غیرنیوتنی به شمار می‌آید که ما در این پژوهش قصد داریم این موضوع را بررسی و ارزیابی کنیم. هدف ما در این پژوهش ضمن پرداختن به کاربرد روش شبکه‌بندی بولتزمن در شبیه‌سازی جریان سیال غیرنیوتنی پاورلا، بررسی جریان سیال و پارامترهای مهم جریان از قبیل سرعت، ویسکوزیته، نرخ کرنش و تنش برشی درون هندسه‌های متفاوت می‌باشد.

# مروری بر کارهای انجام شده

روش شبکه‌بندی بولتزمن (LBM) در هندسه‌های متفاوتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. یکی از این هندسه‌ها میکروکانال‌ها می‌باشند. مدلسازی میکروکانال‌ها در دهه اخیر مورد توجه برخی از محققان قرار گرفته شده است. آگاروال و چوساک[7] به کمک LBM توانستند میکروکانال‌هایی را که در آن سیالات غیرنیوتنی عبور می‌کنند را مدلسازی کنند. تانگ و همکاران[8] توانستند مجراها و کانال‌های متخلخلی را که درون آن یک سیال غیرنیوتنی عبور می‌کند را مدلسازی کنند. آن‌ها همچنین اثرات نیروهای خارجی را بر روی حرکت جریان نیز در نظر گرفته‌اند و به این نتیجه رسیدند که روش شبکه‌بندی بولتزمن با داده‌های تجربی سازگاری مورد قبولی دارد. همچنین کفایتی و همکاران[9] روش شبکه‌بندی بولتزمن را برای یک سیال غیرنیوتنی درون یک محیط متخلخل مورد بررسی قرار دادند و نتایج حاصله را به سایر سیالات نیز تعمیم دادند. نجات و همکاران[10] به مطالعه و مدلسازی جریان نیوتنی که از روی یک استوانه محصور بین دو صفحه موازی عبور می‌کند با روش شبکه‌بندی بولتزمن پرداخته‌اند. زهانگ و همکاران[11] به بررسی رفتار جریان غیرنیوتنی در حال عبور از بستر پرشده‌ای که حاوی ذرات کروی شکل می‌باشد، پرداخت. آنها پی بردند که مدلسازی انجام شده در مقایسه با داده‌های تجربی از دقت قابل قبولی برخوردار است. در میان محققین در دهة اخیر، افرادی نیز روش شبکه‌بندی بولتزمن را مورد ارزیابی قرار دادند. گریزینگر و همکاران[1] میزان دقت، پایداری و بازده روش شبکه‌بندی بولتزمن را برای سیالات غیرنیوتنی را به طور کامل مورد ارزیابی قرار داد.

# روش شبکه­بندی بولتزمن

روش شبکه‌بندی بولتزمن از روش شبکه گاز[[1]](#footnote-2)، که روشی بر پایه سینتیک ذرات است و از شبکه‌بندی گسسته و زمان گسسته استفاده می‌کند، نشأت گرفته شده است. همچنین روش شبکه‌بندی بولتزمن میتواند به عنوان یک روش اختلاف محدود بخصوص برای معادله سینتیک تابع توزیع سرعت به شمار بیاید. چندین راه برای رسیدن به معادله شبکه بولتزمن (LBE) چه از طریق مدل‌های سرعت گسسته و چه از طریق معادله سینتیک بولتزمن وجود دارد. همچنین چندین راه برای به دست آوردن معادلات ماکروسکوپیک ناویر-استوکس از معادله شبکه بولتزمن وجود دارد[12].

## معادله شبکه بولتزمن

برای معرفی معادله شبکه بولتزمن از معادله سینتیک گسسته برای تابع توزیع تعادلی استفاده می شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (1) |  |

که در آن معرف تابع توزیع سرعت ذره در امتداد جهت i بوده و معرف عملگر برخورد که نرخ تغییرات در نتیجه برخورد را بیان می‌کند، می‌باشد. و به ترتیب بیانگر فاصله و گام زمانی می‌باشند. تنها به تابع توزیع محلی بستگی دارد. *دانسیته و مومنتوم دانسیته با استفاده از توابع توزیع به دست می­آیند.*

|  |  |
| --- | --- |
| (2) |  |

برای رسیدن به معادله هیدرودینامیک ماکروسکوپیک، بسط چپمن – انسکوگ را که به طور ویژه یک بسط چندمقیاسی معمول می­باشد به کار گرفته می شود [13]. با این عمل و به کارگیری فرضیات مناسب معادله‌ای موسوم به معادله LBGK[[2]](#footnote-3) بدست خواهد آمد. این معادله برای حالت دو بعدی در معادله (3) نشان داده شده است.

|  |  |
| --- | --- |
| (3) |  |

که در آن و τ به ترتیب تابع توزیع تعادلی و پارامتر زمان آسایش می­باشند.

در روش شبکه­بندی بولتزمن یک فرم عمومی برای تابع توزیع تعادلی به صورت معادله (4) می­باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (4) |  |

که در این رابطه ضریب وزنی می­باشد که بسته به هندسه مورد استفاده در LBM مقادیر متفاوتی خواهد داشت. در این پژوهش از هندسه دو بعدی – 9 سرعته (D2Q9) استفاده شده است. مقادیر ضرایب وزنی برای این هندسه در معادله (5) آورده شده است.

همچنین در معادله (4)، u معرف سرعت ذره بوده و به صورت می­باشد.

|  |  |
| --- | --- |
| (5) |  |

## شرایط مرزی در روش شبکه­بندی بولتزمن

یکی از شرایط مهم و اساسی در الگوسازی شبکه بولتزمن یک جریان، الگوسازی دقیق شرایط مرزی آن است. مشخص کردن شرایط مرزی برای معادلات ناویر-استوکس به نحوی ساده و آسان است. اما در مورد روش شبکه بولتزمن اینطور نیست. معادلات مناسب برای محاسبه توابع توزیع مدنظر در مرزها برای شرایط مرزی داده شده، مورد نیاز است. شرط مرزی پریودیک[[3]](#footnote-4)، شرط مرزی باز[[4]](#footnote-5) و شرط مرزی جهش به عقب[[5]](#footnote-6) از متداول­ترین نوع شروط مرزی در شبکه بولتزمن می­باشند.

## الگوریتم حل جریان سیال به روش شبکه­بندی بولتزمن

در این قسمت الگوریتم برنامه رایانه‌ای نوشته شده برای شبیه‌سازی سیال نیوتنی و غیرنیوتنی با استفاده از این روش توضیح داده شده است. پارامتر ویسکوزیته سینماتیکی (ν) توسط رابطة (6) به زمان آسایش (τ) مرتبط می­شود.

|  |  |
| --- | --- |
| (6) |  |

در سیال نیوتنی مقدار ویسکوزیته سینماتیک همواره ثابت بوده و به تبع آن مقدار زمان آسایش نیز ثابت خواهد بود. اما در سیالات غیرنیوتنی مقدار ویسکوزیته سینماتیکی تابعی از نرخ کرنش بوده و متغیر می‌باشد و بدین ترتیب مقدار زمان آسایش نیز متغیر خواهد بود. این موضوع سبب چالش‌هایی از قبیل عدم همگرایی خواهد شد. به منظور عبور از این چالش روش‌های متفاوتی برای محاسبة نرخ کرنش در روش عددی پیشنهاد شده است که در ادامه اشاره می‌شود.

یکی از روش‌ها برای محاسبة نرخ کرنش استفاده از اختلاف محدود[2] یا حجم محدود[3] می‌باشد. به طور خلاصه میتوان گفت در این روش برای محاسبه مقدار نرخ کرنش و سپس محاسبة ویسکوزیته از گرادیان سرعت بین دو نقطه مجاور یا نقاط مجاور استفاده کرد. روش بعدی استفاده از ثابت دوم تانسور نرخ کرنش می‌باشد. در این روش مقدار نرخ کرنش محلی در هر نقطه لتیس محاسبه می‌گردد. این موضوع به دلیل اینکه نقاط لتیس را درگیر می‌کند از مزیت بهتری نسبت به سایر روش‌ها برخوردار است[14]. روش سوم نیز ثابت نگه داشتن زمان آسایش و اصلاح یا اضافه کردن یک ترم نیروی خارجی به معادله (3) می‌باشد. اگرچه مزیت این موضوع به دلیل ثابت بودن زمان آسایش در پشت سر گذاشتن چالش همگرایی می‌باشد اما از معایب آن نسبت به سایر روش‌ها میتوان به طولانی‌تر شدن زمان انجام محاسبات به دلیل محاسبة مشتق دوم علاوه بر مشتق اول مقادیر سرعت، دانست [15]. در این روش بسته به معادله سیال غیرنیوتنی، ترم نیروی خارجی اضافه شده به معادلة (3) تغییر خواهد کرد.

لازم به ذکر است به دلیل عمومیت و مزیت روش دوم یعنی استفاده از ثابت دوم تانسور نرخ کرنش، در این پژوهش نیز از این روش رایج استفاده شده است. تشریح کامل این روش در بخش 3-3-2 آورده شده است.

### الگوریتم حل جریان سیال نیوتنی

الگوریتم برنامه رایانه‌ای برای شبیه‌سازی جریان سیال نیوتنی به شرحی که در ادامه بیان می شود، می باشد. همانطوری که گفته شد در سیال نیوتنی مقدار ویسکوزیته ظاهری و به تبع مقدار زمان آسایش ثابت می‌باشد.

1. تعیین پارامترهای ورودی مسئله
2. مرحلة بعدی مرحلة برخورد می‌باشد؛ در این مرحله تابع توزیع و تابع توزیع تعادلی به ترتیب از معادلات (3) و (4) به دست می‌آیند.
3. مرحلة پخش یا جریان به صورت معادله (7) می‌باشد:

|  |  |
| --- | --- |
| (7) |  |

به منظور حفظ مقادیر پیشین و برای جلوگیری از بازنویسی این مرحله را به کار می‌بریم.

1. اعمال شرایط مرزی مناسب
2. محاسبة مقادیر کمیت‌های ماکروسکوپیک ρ و u با استفاده از تابع توزیع توسط معادله­ (2)
3. با استفاده مقادیر به دست آمده در گام حاضر، به مرحلة (2) بازگشته و این چرخه را تا رسیدن به همگرایی متناسب ادامه می‌دهیم.

### الگوریتم حل جریان سیال غیرنیوتنی

الگوریتم برنامه رایانه‌ای برای شبیه‌سازی جریان سیال غیر نیوتنی به شرحی که در ادامه بیان می شود، می باشد. همانطوری که گفته شد تفاوت روش حل در سیال غیرنیوتنی نسبت به سیال نیوتنی در این است که مقدار ویسکوزیته ظاهری و به تبع مقدار زمان آسایش ثابت نمی‌باشد. به عبارتی در هر گام زمانی بایستی این مقدار محاسبه گردد. برای شبیه‌سازی سیالات غیرنیوتنی روش‌های عددی متفاوتی در مراجع ذکر شده است[15], [16], [17]. الگوریتم حل جریان سیالات غیرنیوتنی به صورتی که در ادامه می‌آید در این پژوهش به کار گرفته شده است.

1. تعیین پارامترهای ورودی مسئله
2. مرحلة برخورد؛ این مرحله این همانند مرحله دوم شبیه‌سازی سیالات نیوتنی می‌باشد.
3. مرحلة پخش یا جریان نیز همانند مرحله سوم شبیه‌سازی سیالات نیوتنی می‌باشد.
4. اعمال شرایط مرزی مناسب
5. محاسبة مقادیر کمیت‌های ماکروسکوپیک ρ و u با استفاده از تابع توزیع توسط معادله (2)
6. در این مرحله ما بایستی مقادیر زمان آسایش را بروزرسانی کنیم.

برای محاسبة زمان آسایش نیاز به مقدار ویسکوزیته ظاهری داریم که آن نیز به گرادیان سرعت یا نرخ کرنش وابسته می‌باشد. به زبان ریاضی خواهد بود. بدین منظور بایستی از روش‌های عددی برای محاسبه گرادیان سرعت یا نرخ کرنش استفاده کنیم و پس از آن با استفاده از مدل سیال غیرنیوتنی مورد نظرمان مقدار ویسکوزیته و پس از آن مقدار زمان آسایش را محاسبه کنیم.

مقدار تانسور تنش () برای یک سیال تراکم‌ناپذیر با فشار P به صورت معادله (8) تعریف می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (8) |  |

که در آن β،α جهت‌های حرکت (به عنوان مثال x,y در مختصات کارتزین)، دلتای کرونکر و تانسور نرخ کرنش می‌باشد که به صورت معادله (9) تعریف می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
| (9) |  |

آرتولی نشان داد[18] که میتوان مقدار تانسور نرخ کرنش را به صورت عددی از طریق معادله (10) به دست آورد:

|  |  |
| --- | --- |
| (10) |  |

بدین ترتیب اندازة نرخ کرنش از معادله (11) محاسبه خواهد شد.

|  |  |
| --- | --- |
| (11) |  |

در نتیجه محاسبة تنش بدین روش از آنجایی که محاسبات با حذف مشتقات سرعت صورت می‌گیرد بسیار مناسب است. از طرفی، مقدار تنش به صورت محلی اندازه‌گیری می‌شود که مزیتی برای بکارگیری روش شبکه‌بندی بولتزمن بطور موازی به حساب می‌آید[19].

زمان آسایش جدید را با استفاده از معادله (12) برای شروع گام جدید استفاده می‌کنیم.

|  |  |
| --- | --- |
| (12) |  |

که در معادلة پیشین ν ویسکوزیته سینماتیک می‌باشد.

1. با استفاده مقادیر به دست آمده در گام حاضر، به مرحلة (2) می‌رویم و این چرخه را تا رسیدن به همگرایی متناسب ادامه می‌دهیم.

# مسئله مورد بررسی

در این پژوهش قابلیت‌های روش شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی سیالات غیرنیوتنی را مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور شبیه‌سازی جریان سیال غیرنیوتنی پاورلا (مدل توانی) درون یک حفرة دو بعدی متحرک یا به اصطلاح (Lid Driven Cavity) در نظر گرفته شده استُ.

## حفره دو بعدی با دیواره بالایی متحرک

این مسئله به عنوان یک مسئله معیار برای صحت‌سنجی کدهای CFD به‌کار می‌رود. یک حفره مربعی به طوری که دیواره بالایی آن با سرعت ثابت از سمت چپ به راست در حال حرکت است و سایر دیواره‌ها دارای سرعت صفر یا در حال سکون هستند. شماتیک این حفره در شکل (1) رسم شده است. هدف از شبیه‌سازی این مسئله بررسی خطوط جریانی[[6]](#footnote-7) و مشخص کردن مختصات مرکزی گردابه[[7]](#footnote-8) می‌باشد. همچنین اثر رینولدز و شاخص مدل پاورلا (n) بر رفتار نرخ کرنش و ویسکوزیته نیز مورد بررسی و مقایسه قرار دادیم.

در این شبیه‌سازی از سیال پاورلا با شاخص‌های پاورلا (5/0، 1 و 5/1) در رینولدزهای متفاوت (100 و 400) با شبکه‌بندی 257×257 استفاده شده است. رابطة بین تنش برشی و نرخ کرنش در سیالات پاورلا به صورت معادله (13) می‌باشد.

|  |  |
| --- | --- |
| (13) |  |

که در آن ویسکوزیته ظاهری می­باشد.

|  |
| --- |
|  |
| شکل 1. شماتیک حفره دو بعدی با دیواره متحرک |

عدد رینولدز در سیالات پاورلا به صورت معادله (14) تعریف می‌شود[6].

|  |  |
| --- | --- |
| (14) |  |

با توجه به مقدار عددی Re، سرعت دیواره () و طول مشخصه (H)، مقدار نیز برای شروع فرایند حل به روش شبکه بولتزمن به دست خواهد آمد.

در این مسئله از شرط مرزی جهش به عقب برای صفحات سمت چپ و راست و برای دیوار بالایی و پایینی از شرط مرزی سرعت ثابت استفاده کرده‌ایم. به بیان ریاضی خواهیم داشت:

**شرط مرزی در دیوارة بالایی:**

|  |  |
| --- | --- |
| (15) |  |

**شرط مرزی در دیوارة پایینی:**

|  |  |
| --- | --- |
| (16) |  |

**شرط مرزی در دیوارة سمت چپ:**

|  |  |
| --- | --- |
| (17) |  |

**شرط مرزی در دیوارة سمت راست:**

|  |  |
| --- | --- |
| (18) |  |

مقدار پایداری جواب نیز برابر با 7-10 در نظر گرفته شده است. به عبارتی شبیه‌سازی تا زمانی که شرط زیر ارضا گردد ادامه خواهد داشت:

|  |  |
| --- | --- |
| (19) |  |

# نتایج

در این بخش به بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی مسئله مذکور خواهیم پرداخت. لازم به ذکر است در شبیه­سازی از مدل سیال غیرنیوتنی پاورلا برای سیال مورد نظرمان استفاده کردیم. در ابتدا شبیه­سازی را با سیال نیوتنی () در و سیال پاورلا با () در شروع کردیم. در شبیه‌سازی‌های پژوهش حاضر مقدار گام زمانی برابر با مقدار گام حرکتی در نظر گرفته شده است. مقدار موجود در معادله (14) نیز در شروع فرآیند حل از مقدار رینولدز به دست می­آید. نتایج از حاصل از شبیه‌سازی در شکل‌های (4) تا (6) ارائه شده است و لازم به ذکر است این نتایج با نتایج قیا و دیگران[20]، نئوفیتو[3] و بل و سورانا[2] مقایسه شده است.

## بررسی سرعت افقی و عمودی درون حفره

شکل­های (2-الف) و (2-ب) به ترتیب پروفیل سرعت افقی و پروفیل سرعت عمودی در مرکز حفره دو بعدی با دیواره متحرک سیال نیوتنی () در و مقایسه آن با نتایج نئوفیتو[3] و قیا[20] نشان می­دهد. همانطوری که از این شکل‌ها پیداست نتایج پژوهش حاضر، داده‌های مقالات مرجع را پوشش می‌دهد. لازم به ذکر است مقادیر سرعت افقی و عمودی بر اساس مقدار و مقادیر طول و عرض بر اساس طول و عرض حفره بی‌بعد شده‌اند.

در ادامه جریان سیال پاورلا با () در مورد بررسی قرار گرفته است. شکل (3-الف) و (3-ب) به ترتیب پروفیل سرعت افقی و پروفیل سرعت عمودی در مرکز حفره دو بعدی با دیواره متحرک سیال پاورلا با () در و مقایسه آن با نتایج نئوفیتو[3] و بل[2] نشان می­دهد. همانطوری که از این شکل‌ها پیداست نتایج پژوهش حاضر، همخوانی قابل قیاسی با داده‌های مقالات مرجع دارد.

|  |  |
| --- | --- |
| *(ب)* | *(الف)* |
| *شکل 2. پروفیل سرعت افقی (الف) و سرعت عمودی (ب) در مرکز حفره دو بعدی با دیواره متحرک سیال نیوتنی () در و مقایسه آن با نتایج نئوفیتو*[3] *و قیا*[20] | |

|  |  |
| --- | --- |
| *(ب)* | *(الف)* |
| شکل 3. پروفیل سرعت افقی (الف) و سرعت عمودی (ب) در مرکز حفره دو بعدی با دیواره متحرک سیال پاورلا با () در و مقایسه آن با نتایج نئوفیتو[3] و بل[2] | |

شکل­های (4-الف) و (4-ب) نیز به ترتیب پروفیل سرعت افقی و پروفیل سرعت عمودی سیال پاورلا با () در مرکز حفره دو بعدی با دیواره متحرک در و مقایسه آن با نتایج نئوفیتو[3] و بل[2] نشان می­دهد.

با توجه به نتایج حاصل از روش شبکه بولتزمن تا بدین جا میتوان پی برد که این روش توانایی و ظرفیت بالایی برای شبیه­سازی سیالات غیرنیوتنی پاورلا دارد. همچنین در ادامه اثبات می­شود که روش شبکه بولتزمن قابلیت شبیه­سازی در رینولدزهای بالا را نیز دارا می­باشد.

|  |  |
| --- | --- |
| *(ب)* | *(الف)* |
| شکل 4. پروفیل سرعت افقی (الف) و سرعت عمودی (ب) در مرکز حفره دو بعدی با دیواره متحرک سیال پاورلا با () در و مقایسه آن با نتایج نئوفیتو[3] و بل[2] | |

### بررسی خطوط جریان درون حفره

در مقایسه‌ای دیگر، مقدار مختصات مرکزی مربوط به گردابة اولیه با نتایج نئوفیتو[3] در رینولدز 100 و 500 مورد بررسی قرار گرفته که در جدول (1) جمع‌بندی شده است.

جدول 1. مقادیر مختصات مرکزی گردابه اولیه درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| مختصات گردابه | |  |  | |  | |  |
|  | پژوهش حاضر |  |  | |  | |  |
| نئوفیتو[3] |  |  | |  | |  |
| مختصات گردابه | |  | |  | |  | |
|  | پژوهش حاضر |  | |  | |  | |
| نئوفیتو[3] |  | |  | |  | |

### اثر عدد رینولدز بر روی جریان سیال پاورلا حفره دو بعدی با دیواره متحرک

در این بخش، اثر عدد رینولدز بر روی خطوط جریان، نرخ کرنش و ویسکوزیته سیال درون حفره مورد بررسی قرار گرفته است. به همین منظور در ابتدا برای سیال پاورلا با شاخص مدل توانی برابر با 5/1 که به عنوان نماینده‌ای از سیالات تنش غلیظ‌شونده یا دیلاتانت در نظر گرفته شده است، برای مقادیر رینولدز 100 تا 10000 شبیه‌سازی انجام شده است. در این نوع سیالات با افزایش تنش برشی یا نرخ کرنش، مقدار ویسکوزیته افزایش می­یابد. در شکل (5) اثر عدد رینولدز بر روی موقعیت گردابة اولیه به وضوح نشان داده شده است. همچنین در شکل (6) خطوط جریان برای حالت‌های مذکور نشان داده شده است. همانطوری که از این شکـل‌ها پیداست عدد رینولـدز تاثیر بسیـاری بر روی ساختـار جریان دارد.

|  |
| --- |
| شکل 5. اثر عدد رینولدز بر روی موقعیت گردابة اولیه برای سیال پاورلا با درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک |

همانطوری که از شکل (6) پیداست برای سیال پاورلا با به ازای حفره دو بعدی مفروض مسئله دارای سه گردابه، یک گردابه در وسط و دو گردابه دیگر در قسمت گوش‌‌های پایین حفره، مشاهده می‌‌شود و سپس با افزایش عدد رینولدز تا مقدار 10000 مقدار گردابه‌‌ها به چهار عدد نیز خواهد رسید. افزایش عدد رینولدز سبب افزایش تلاطم در جریان شده و به موجب آن گردابه‌‌های بیشتری درون حفره به وجود خواهد آمد. ضمن اینکه تلاطم ایجاد شده به علت افزایش عدد رینولدز سبب هدایت گردابه‌‌ها از محل ایجاد تنش یعنی دیواره بالایی به سمت مرکز حفره خواهد شد.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Re = 500 | Re = 400 | Re = 100 |
| Re = 10000 | Re = 5000 | Re = 1000 |
| شکل 6. اثر عدد رینولدز بر روی خطوط جریان برای سیال پاورلا با n = 1.5 درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک | | |

در جدول (2) مختصات مربوط به گردابه­های اولیه و سایر گردابه­های تشکیل شده برای سیال پاورلا با برای رینولدزهای متفاوت جمع­­بندی شده است.

جدول 2. مقادیر مختصات گردابه‌ها برای سیال پاورلا با n = 1.5 در رینولدزهای مختلف درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **عدد رینولدز** | **مختصات گردابه­ها** | | | |
| 100 | - |  |  |  |
| 400 | - |  |  |  |
| 500 | - |  |  |  |
| 1000 | - |  |  |  |
| 5000 |  |  |  |  |
| 10000 |  |  |  |  |

*در مقایسه­ای دیگر و برای بهتر پی بردن به اثر عدد رینولدز درون حفره دو بعدی متحرک، تغییرات پروفیل سرعت در مرکز حفره نسبت به عدد رینولدز در شکل (7) نشان داده شده است. همانطوری که از این شکل پیداست عدد رینولدز تاثیر قابل توجهی بر روی پروفیل سرعت درون حفره دارد. برای پروفیل سرعت افقی و عمودی در مرکز حفره تغییرات چشمگیری نسبت به مقادیر رینولدز کمتر از این مقدار را نمایش می­دهد. با افزایش مقدار رینولدز پروفیل سرعت در مرکز کانال خطی­ صاف­تر خواهد شد که بدین معناست که یک منطقه گرداب یکنواخت در هستة مرکزی حفره در حال شکل گرفتن است. به طور خلاصه، افزایش عدد رینولدز نه تنها منجر به افزایش تعداد گردابه­ها خواهد شد بلکه سبب پیچیدگی ساختار جریان نیز خواهد شد*[21]*. به دلیل افزایش عدد رینولدز مقدار اینرسی نیز افزایش یافته که این موضوع سبب افزایش مقدار پیک در مقادیر سرعت­ها خواهد شد.*

|  |  |
| --- | --- |
| *(ب)* | *(الف)* |
| *شکل 7. اثر عدد رینولدز بر روی پروفیل سرعت افقی (الف) و سرعت عمودی (ب) سیال پاورلا () در مرکز حفره دو بعدی با دیواره متحرک* | |

از طرفی دیگر برای سیال پاورلا با که به عنوان نماینده­ای از سیالات تنش رقیق­شونده یا شبه­پلاستیک در نظر گرفته شده است، برای مقادیر رینولدز 100 تا 1000 شبیه­سازی انجام شده است. در این نوع سیالات با افزایش تنش برشی یا نرخ کرنش، مقدار ویسکوزیته افزایش می­یابد. در شکل (8) خطوط جریان برای حالت­های مذکور نشان داده شده است. همانطوری که از این شکل­ها پیداست عدد رینولدز تاثیر بسیاری بر روی ساختار جریان دارد. خطوط جریان در این حالت تقریبا مشابه با حالت می­باشد و تفاوت آنها در میزان کشیدگی خطوط جریان در یک رینولدز ثابت عنوان کرد.

|  |  |
| --- | --- |
| Re = 500 | Re = 100 |
| Re = 10000 | Re = 1000 |
| شکل 8. اثر عدد رینولدز بر روی خطوط جریان برای سیال پاورلا با n = 0.5 درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک | |

### بررسی اثر شاخص مدل پاورلا (n) بر روی ساختار جریان سیال پاورلا درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک

در این بخش اثر شاخص مدل توانی (n) بر ساختار جریان توانی مورد ارزیابی قرار گرفته است. بدین منظور، با ثابت نگه داشتن عدد رینولدز مقدار n را از 5/0 تا 5/1 تغییر داده‌ا شده است تا تمام حالت‌های سیال از قبیل تنش رقیق‌شونده، نیوتنی و تنش غلیظ‌شونده را شامل شود.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n = 0.75 | n = 0.5 | n = 0.25 |
| n = 1.5 | n = 1.25 | n = 1.0 |
| شکل 9. اثر شاخص مدل پاورلا (n) بر روی خطوط جریان سیال پاورلا درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک در Re = 100 | | |
| n = 0.75 | n = 0.5 | n = 0.25 |
| n = 1.5 | n = 1.25 | n = 1.0 |
| شکل 10. اثر شاخص مدل پاورلا (n) بر روی خطوط جریان سیال پاورلا درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک در Re = 500 | | |

نتایج عددی برای عدد رینولدز 100 و 500 در شاخص‌های مدل پاورلا مختلف در شکل‌های (11) تا (12) ارائه شده است. انتخاب این اعداد رینولدز به دلیل عمومیت استفاده در مقالات انتخاب شده است. اثر n بر روی ساختار جریان سیال پاورلا در شکل‌های (11) و (12) نمایش داده شده است. با توجه به این شکل‌ها، در یک عدد رینولدز ثابت ساختار جریان در حالت‌های مختلف بسیار به هم شبیه هستند. با افزایش مقدار n ، تعداد گردابه‌های مشاهده شده درون حفره افزایش یافته و ساختار جریان نیز پیچیده‌تر خواهد شد.

اثر شاخص مدل پاورلا بر روی پروفیل سرعت افقی و عمودی در امتداد مرکز افقی و عمودی حفره در شکل­ (11) (برای ) و شکل­ (12) (برای ) ارائه شده است. همانطوری که از شکل (11-الف) پیداست با افزایش شاخص مدل توانی مقدار سرعت افقی در نزدیکی پایین حفره دارای مقادیر بزرگتر و در نزدیکی بالای حفره دارای مقادیر کمتر می­باشد. دلیل این امر وجود منشا سرعت یا اختلاف اندازه حرکت در بالای حفره می­باشد. همچنین با توجه به شکل (11-ب) با افزایش مقدار شاخص مدل توانی مقدار سرعت عمودی در نزدیکی دیواره‌های سمت چپ و راست حفره افزایش می­یابد.

|  |  |
| --- | --- |
| *(ب)* | *(الف)* |
| *شکل 11. اثر شاخص مدل پاورلا (*n*) بر روی پروفیـل سرعت افقی (الف) و سرعت عمودی (ب) سیال پاورلا در مرکــز حفـره دو بعدی با دیواره متحـرک در ()* | |
| *(ب)* | *(الف)* |
| *شکل 12. اثر شاخص مدل پاورلا (n) بر روی پروفیـل سرعت افقی (الف) و سرعت عمودی (ب) سیال پاورلا در مرکــز حفـره دو بعدی با دیواره متحـرک در ()* | |

در شکل (13) اثر شاخص مدل توانی بر روی موقعیت گردابة اولیه مورد بررسی قرار گرفته است. همانطوری که از این شکل پیداست برای عدد رینولدز 100، با افزایش مقدار (n)، مختصات گردابه به طور تدریجی به سمت مرکز حفره میل خواهد کرد. در حالتی که عدد رینولدز برابر با 500 می­باشد، برای مقادیر n کوچکتر از یک یا به عبارتی برای سیالات تنش رقیق­شونده، با افزایش شاخص مدل توانی مختصات گردابه به طور تدریجی به سمت مرکز حفره میل خواهد کرد و پس از آن برای سیالات با n بزرگتر از یک، روند این مختصات به صورت یک خط عمودی تغییر خواهد کرد.

|  |
| --- |
| n=1.5  n=1.25  n=1.0  n=0.75  n=0.50  n=0.25  n=1.5  n=1.25  n=1.0  n=0.75  n=0.50  n=0.25 |
| شکل 13. اثر شاخص مدل توانی (n) بر روی موقعیت گردابه‌ها در رینولدز ثابت درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک |

### مقایسه نرخ کرنش سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی درون حفرة دو بعدی با دیوارة بالایی متحرک

در این قسمت نحوه رفتار نرخ کرنش برای سیال نیوتنی () و مقایسه آن با سیالات غیرنیوتنی تنش رقیق‌شونده () و تنش غلیظ‌شونده () درون یک حفرة دو بعدی با دیوارة بالایی متحرک مورد بررسی قرار دادیم. این مقایسه را برای مقادیر رینولدزهای 100 و 400 و شاخص‌های مدل توانی () و () انجام داده‌ایم.

از آنجایی که در هندسه ما دیوارة بالایی متحرک است در نتیجه انتظار می رود که با افزایش فاصله از دیوارة بالایی نرخ کرنش کاهش یابد. ضمن آن که در سایر دیواره‌ها به دلیل اصل عدم لغزش، سیال درون حفره دارای مقادیر نرخ کرنش بالاتری نسبت به سیال اطراف دیواره است. در شکل­های (14) و (15) نمودار نرخ کرنش نسبت به محور مختصات آورده شده است. لازم به ذکر است محور افقی (X) نسبت به طول حفره و محور عمودی (Y) نسبت به عرض حفره بی‌بعد شده است. همچنین نرخ کرنش نیز بر ماکزیمم مقدار نرخ کرنش سیال نیوتنی در Re = 100 تقسیم شده است تا عددی بی‌بعد شود.

با توجه به شکل‌ (14) و همانطوری که در پاراگراف قبل ذکر شد در حوالی دیوارة بالایی بیشترین مقدار نرخ کرنش را داریم. با دور شدن از دیوارة بالایی مقدار نرخ کرنش کاهش می‌یابد. در بخش‌هایی از حفره نرخ کرنش دارای مقادیر اکسترمم یا به اصطلاح دارای پیک­هایی می‌باشد. این پیک‌ها تحت تاثیر گردابه‌های به وجود آمده درون حفره می‌باشد.

شکل (14-ب) مربوط به نرخ کرنش سیال پاورلا (n = 1.5) که نماینده‌ای از سیالات تنش غلیظ‌شونده بوده، در Re = 100 می‌باشد. همانطوری که از این شکل پیداست نرخ کرنش در دیوارة بالایی دارای مقادیر کمتری نسبت به مقادیر نرخ کرنش سیال نیوتنی در Re = 100 می‌باشد. این موضوع را میتوان به این صورت توجیه کرد که ویسکوزیته سیال تنش غلیظ‌شونده در نزدیکی دیوارة بالایی دارای مقادیر بیشتری نسبت به ویسکوزیته سیال نیوتنی می‌باشد چرا که در این نوع سیالات ویسکوزیته با نرخ کرنش رابطة مستقیم دارد و در نزدیکی دیوارة بالایی که مقدار نرخ کرنش بیشتر است، مقدار ویسکوزیته نیز بیشتر می‌باشد. این عامل باعث می‌شود که انتقال اندازه حرکت در آن نواحی دشوارتر صورت گرفته و مقدار نرخ کرنش کاهش یابد.

شکل (14-ج) نیز مربوط به نرخ کرنش سیال پاورلا (n = 0.5) که نماینده‌ای از سیالات تنش رقیق‌شونده بوده، در Re = 100 می‌باشد. همانطوری که از این شکل پیداست نرخ کرنش در دیوارة بالایی دارای مقادیر بیشتری نسبت به مقادیر نرخ کرنش سیال نیوتنی در Re = 100 می‌باشد. همانند توجیهی که در پاراگراف پیشین در رابطه با سیال تنش غلیظ‌شونده ارائه شد، برای سیال تنش رقیق‌شونده هم میتوان گفت که ویسکوزیته در این سیال در نزدیکی دیوارة بالایی دارای مقادیر کمتری نسبت به ویسکوزیته سیال نیوتنی می‌باشد چرا که در این نوع سیالات ویسکوزیته با نرخ کرنش رابطة عکس دارد و در نزدیکی دیوارة بالایی که مقدار نرخ کرنش بیشتر است، مقدار ویسکوزیته کمتر می‌باشد. این عامل باعث می‌شود که انتقال اندازه حرکت در آن نواحی راحت‌تر صورت گرفته و مقدار نرخ کرنش افزایش یابد.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| (الف) | |
|  |  |
| (ب) | |
|  |  |
| (ج) | |
| شکل 14. شماتیک نرخ کرنش سیال نیوتنی (الف)، سیال پاورلا n = 1.5 (ب) و سیال پاورلا n = 0.5 (ج) درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک در Re = 100 | |

برای مشاهدة اثر رینولدز بر روی نرخ کرنش درون حفره دو بعدی با دیوارة بالایی متحرک، مقدار رینولدز را به 400 افزایش داده شده است. انتظار می‌رود به دلیل افزایش رینولدز، تلاطم درون سیال افزایش یافته و این موضوع باعث افزایش نرخ کرنش درون حفره و به خصوص درون دیواره شود. شکل‌ (15) نتایج حاصل از شبیه‌سازی سیال نیوتنی، سیال پاورلا (n = 1.5) و سیال پاورلا (n = 0.5) در Re = 400 آورده شده است.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| (الف) | |
|  |  |
| (ب) | |
|  |  |
| (ج) | |
| شکل 15. شماتیک نرخ کرنش سیال نیوتنی (الف)، سیال پاورلا n = 1.5 (ب) و سیال پاورلا n = 0.5 (ج) درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک در Re = 400 | |

### مقایسه ویسکوزیته سیالات نیوتنی و غیرنیوتنی درون حفرة دو بعدی با دیوارة بالایی متحرک

در این قسمت نحوه رفتار ویسکوزیته سیالات غیرنیوتنی تنش رقیق‌شونده و تنش غلیظ‌شونده و مقایسه آن‌ها با هم درون یک حفرة دو بعدی با دیوارة بالایی متحرک مورد بررسی قرار گرفته است. این مقایسه را برای مقادیر رینولدزهای 100 و 400 و شاخص‌های مدل توانی () و () انجام داده‌ایم.

همانطوری که می‌دانیم ویسکوزیته در سیالات تنش غلیظ‌شونده رابطة مستقیم با نرخ کرنش دارد. در نتیجه در مکان‌های که نرخ کرنش بیشتر است، مقدار ویسکوزیته نیز بیشتر می‌باشد. این موضوع در سیالات تنش رقیق‌شونده برعکس می‌باشد. به عبارتی در سیالات تنش رقیق‌شونده در مکان‌هایی که مقدار نرخ کرنش بیشتر است، مقدار ویسکوزیته کمتر است. در شکل‌های (16) و (17) رفتار ویسکوزیته را درون حفرة دو بعدی با دیواره بالایی متحرک آورده شده است. لازم به ذکر است محور افقی (X) نسبت به طول حفره و محور عمودی (Y) نسبت به عرض حفره بی‌بعد شده است.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| (الف) | |
|  |  |
| (ب) | |
| شکل 16. شماتیک ویسکوزیته سیال پاورلا n = 1.5 (الف) و سیال پاورلا n = 0.5 (ب) درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک در Re = 100 | |
|  |  |
| (الف) | |
|  |  |
| (ب) | |
| شکل 17. شماتیک ویسکوزیته سیال پاورلا n = 1.5 (الف) و سیال پاورلا n = 0.5 (ب) درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک در Re = 400 | |

همانطوری که مشاهده می‌شود در نقاطی که پتانسیل شکل‌گیری گردابه‌ها درون حفره دو بعدی وجود دارد، ویسکوزیته دارای یک پیک می‌باشد. این پیک در سیالات تنش غلیظ‌شونده به صورت مینیمم (چاه) و در سیالات تنش رقیق‌شونده به صورت ماکزیمم (قله) خود را نشان می‌دهد.

# نتیجه­گیری

در این پژوهش از روش شبکه‌بندی بولتزمن برای شبیه‌سازی جریان سیال پاورلا درون حفره دو بعدی با دیواره متحرک استفاده شده است و نتایج حل عددی گزارش شده است. در شبیه‌سازی‌های صورت گرفته اثر عدد رینولدز و شاخص مدل توانی (n) بر روی ساختار جریان و محل گردابه‌ها در حفره‌ها مورد ارزیابی قرار دادیم. تطابق حل به روش شبکه‌بندی بولتزمن با حل تحلیلی در شبیه‌سازی‌های انجام گرفته خوب بوده به طوری که میزان خطا بین این دو روش کمتر از 1/0% درصد برآورد شده است. در نتیجه میتوان روش شبکه­بندی بولتزمن را روش عددی قابل قبولی برای شبیه­سازی سیالات غیرنیوتنی در نظر گرفت. در مسئله حفره دو بعدی با دیواره متحرک برای سیال پاورلا با به ازای رینولدزهای پایین دارای سه گردابه، یک گردابه در وسط و دو گردابه دیگر در قسمت گوش‌های پایین حفره، مشاهده می‌شود و سپس با افزایش عدد رینولدز تا مقادیر بسیار بالا مقدار گردابه‌ها به چهار عدد نیز خواهد رسید. با افزایش مقدار رینولدز پروفیل سرعت در مرکز کانال خطی‌ صاف‌تر خواهد شد که بدین معناست که یک منطقه گرداب یکنواخت در هستة مرکزی حفره در حال شکل گرفتن است. به طور خلاصه، افزایش عدد رینولدز نه تنها منجر به افزایش تعداد گردابه‌ها خواهد شد بلکه سبب پیچیدگی ساختار جریان نیز خواهد شد. خطوط جریان برای سیال پاورلا با تقریبا مشابه با حالت می‌باشد و تفاوت آنها را میتوان در میزان کشیدگی خطوط جریان در یک رینولدز ثابت عنوان کرد. مقدار (n) در سیال پاورلا بر روی ساختار جریان در یک عدد رینولدز ثابت در حالت‌های مختلف بسیار به هم شبیه هستند. با افزایش مقدار n ، تعداد گردابه‌های مشاهده شده درون حفره افزایش یافته و ساختار جریان نیز پیچیده‌تر خواهد شد. با افزایش مقدار n مقدار سرعت افقی در نزدیکی پایین حفره دارای مقادیر بزرگتر و در نزدیکی بالای حفره دارای مقادیر کمتر می‌باشد. همچنین با افزایش مقدار n مقدار سرعت عمودی در نزدیکی دیواره‌های سمت چپ و راست حفره افزایش می‌یابد. البته این نتیجه را نمیتوان به سایر عدد‌های رینولدز تعمیم داد و با افزایش عدد رینولدز ساختار جریان پیچیده‌تر خواهد شد. همچنین در هندسه مورد نظر با فاصله گرفتن از دیواره بالایی مقدار نرخ کرنش کاهش می‌یابد. در سیال تنش غلیظ‌شونده () به دلیل اینکه ویسکوزیته با نرخ کرنش رابطة مستقیم دارد، در نتیجه در نزدیکی دیوارة بالایی سیال نسبت به سیال نیوتنی ویسکوزتر بوده و سبب می‌شود تا انتقال اندازه حرکت سخت‌تر صورت بگیرد و این موضوع سبب کاهش نرخ کرنش در نزدیکی دیوارة بالایی نسبت به نرخ کرنش سیال نیوتنی می­شود. این موضوع برای سیال تنش رقیق‌شونده () برعکس می‌باشد. چرا که ویسکوزیته در این نوع سیالات رابطة معکوس با نرخ کرنش دارد. بنابراین در نزدیکی دیوارة بالایی سیال روان‌تر از سیال نیوتنی بوده که سبب راحت‌تر انجام شدن انتقال اندازه حرکت و در نتیجه آن باعث افزایش مقادیر نرخ کرنش می‌شود.

**Simulation of non-Newtonian fluid by Lattice Boltzmann Method**

**A. Armand1**

**Z. Mansourpour2**

1,2 School of Chemical Engineering, College of Engineering, University of Tehran, 11155/4563 Tehran, Iran

In recent years, the Lattice Boltzmann Method (LBM) has become an acceptable numerical method for the simulation of the flow of various fluids, especially non-Newtonian fluids(NNF). Simulation of NNF is often associated with challenges such as divergence due to the nonlinear relationship between shear rate and viscosity. In this study, by overcoming the challenges ahead and evaluating the ability of the Lattice Boltzmann method, we have simulated the fluid flow through a two-dimensional cavity with a driven lid and the results of the numerical solution have been reported. We used the Power-Law model in our case study. Also, we have been investigated the effect of Reynolds number and Power Law index (n) on the flow structure and location of vortices in the cavity, and also the effect of these parameters on the shear rate and viscosity.

Keywords: Lattice Boltzmann Method, non-Newtonian fluids, Power-law fluid, lid-driven Cavity

منابع

[1] Grasinger, M., Overacker, S., Brigham, J., 2018. Numerical investigation of the accuracy, stability, and efficiency of lattice Boltzmann methods in simulating non-Newtonian flow, Computers and Fluids, 166, pp. 253–274.

[2] Bell, B. C., Surana, K. S., 1994. P-version least squares finite element formulation for two dimensional, incompressible, non-Newtonian, isothermal and non-isothermal flow, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 18, pp. 83–96.

[3] Neofytou, P., 2005. A 3rd order upwind finite volume method for generalized Newtonian fluid flows, m, pp. 664–680.

[4] Aharonov, E., Rothman, D. H., 1993. Non-Newtonian flow through porous media: a lattice-Boltzmann method, Geophysical Research Letters, 20, no. 8, pp. 679–682.

[5] Huang, C., Chai, Z., Shi, B., 2013. Non-newtonian effect on hemodynamic characteristics of blood flow in stented cerebral aneurysm, Communications in Computational Physics, 13, no. 3, pp. 916–928.

[6] Boyd, J., Buick, J., Green, S., 2006. A second-order accurate lattice Boltzmann non-Newtonian flow model, Journal of Physics A: Mathematical and General, 39, no. 46, pp. 14241–14247.

[7] Agarwal, R. K., Chusak, L., 2010. Lattice Boltzmann Simulations of Slip Flow of Non-Newtonian Fluids in Microchannels, 74.

[8] Tang, G. H., Ye, P. X., Tao, W. Q., 2010. Pressure-driven and electroosmotic non-Newtonian flows through microporous media via lattice Boltzmann method, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 165, no. 21–22, pp. 1536–1542.

[9] Kefayati, G. H. R., Tang, H., Chan, A., Wang, X., 2018. A lattice Boltzmann model for thermal non-Newtonian fluid flows through porous media, Computers and Fluids, 176, pp. 226–244.

[10] Nejat, A., Abdollahi, V., Vahidkhah, K., 2011. Lattice Boltzmann simulation of non-Newtonian flows past confined cylinders, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 166, no. 12–13, pp. 689–697.

[11] Qi, Z., Kuang, S., Yu, A., 2019. Lattice Boltzmann investigation of non-Newtonian fluid flow through a packed bed of uniform spheres, Powder Technology, 343, pp. 225–236.

[12] Mohamad, A. A., (2011). *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*. Springer London Dordrecht Heidelberg New York, (2011).

[13] R.P.Chhabra, J.F.Richardson, (2008). Non-Newtonian fluid behaviour, in *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology*, 2nd Editio., (2008), pp. 1–55.

[14] Siddiki, M. N.-A.-A., Molla, M. M., Thohura, S., Saha, S. C., 2018. Lattice Boltzmann simulation of Non-Newtonian power-law fluid flows in a bifurcated channel, American Institute of Physics, 040023, p. 40023.

[15] Wang, C. H., Ho, J. R., 2011. A lattice Boltzmann approach for the non-Newtonian effect in the blood flow, Computers and Mathematics with Applications, 62, no. 1, pp. 75–86.

[16] Gabbanelli, S., Drazer, G., Koplik, J., 2005. Lattice Boltzmann method for non-Newtonian (power-law) fluids, Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 72, no. 4, pp. 1–7.

[17] Chen, Z., 2020. Simplified Lattice Boltzmann Method for non ‐ Newtonian Power ‐ law Fluid Simplified lattice Boltzmann method for non-Newtonian power-law fluid flows, no. January.

[18] Artoli, A., (2003). *Mesoscopic Computational Haemodynamics*. Univ., (2003).

[19] Boyd, J., Buick, J. M., Green, S., 2007. Analysis of the Casson and Carreau-Yasuda non-Newtonian blood models in steady and oscillatory flows using the lattice Boltzmann method, Physics of Fluids, 19, no. 9.

[20] Ghia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T., 1982. High-Re Solutions for Incompressible Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, Journal of Computational Physics, 48, pp. 387–411.

[21] BOEK, E. S., CHIN, J., COVENEY, P. V., 2003. Lattice Boltzmann Simulation of the Flow of Non-Newtonian Fluids in Porous Media, International Journal of Modern Physics B, 17, no. 01n02, pp. 99–102.

1. Lattice Gas [↑](#footnote-ref-2)
2. Lattice Bhatnagar-Gross-Krook [↑](#footnote-ref-3)
3. Periodic Boundary Condition [↑](#footnote-ref-4)
4. Open Boundary Condition [↑](#footnote-ref-5)
5. Bounce-back Boundary Condition [↑](#footnote-ref-6)
6. Streamlines [↑](#footnote-ref-7)
7. Vortex [↑](#footnote-ref-8)