**حل همزمان معادلات انتقال مومنتوم و حرارت در انتقال حرارت جابجایی و اجباری به روش شبکه بولتزمن**

علیرضا ساکی 1، زهرا منصورپور 2\*

1و2 دانشکده مهندسی شیمی، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

\*mansourp@ut.ac.ir

**چکيده**

در سال­های اخیر و با پیشرفت­هایی که در زمینه­ی ابزارهای رایانه­ای رخ داده، بررسی­ رفتار پدیده­های مختلف همچون بررسی رفتار سیالات که همراه با پدیده­هایی همچون انتقال مومنتوم و حرارت است، آسان­تر شده است. یکی از روش­های شبیه­سازی رفتار سیالات، روش شبکه­ی بولتزمن است. در این مقاله پس از تشریح روش و مرور پژوهش­های مشابه پیشین، بررسی انتقال حرارت جابجایی اجباری و انتقال حرارت جابجایی طبیعی توسط روش شبکه­ی بولتزمن انجام شده است. رویکرد به کار گرفته شده برای حل مسائل، استفاده از توابع توزیع جداگانه برای هر یک از معادلات بقا است. برای مسائلی که معادلات بقا بر یکدیگر تاثیر می­گذارند (مانند انتقال حرارت جابجایی طبیعی) نیز جفت کردن معادلات با اضافه کردن جمله­ی منبع به معادله­ها انجام شده است. در پایان نیز نقاط قوت و محدودیت­های به­کار بردن روش شبکه­ی بولتزمن شرح گردید.

**واژگان كليدي:**

انتقال مومنتوم، انتقال حرارت جابجایی اجباری، انتقال حرارت جابجایی طبیعی، روش شبكه بولتزمن

**1. مقدمه**

عملکرد و یا بازدهی سیستم­های فنی همواره توسط پارامترهای مشخصی تعیین می­شود. داشتن اطلاعات کافی پیرامون این پارامترها کلید شناخت سیستم­های تحت بررسی یا نقطه­ی شروع بهینه­سازی آنها است. در زمینه­های مختلف مهندسی، پارامترهایی همانند تنش، سرعت جریان، توزیع فشار یا دما، نیروهای پسا و برا[[1]](#footnote-1)، اتلاف فشار یا انرژی، نرخ­های انتقال حرارت یا جرم و... نقش مهمی را ایفا می­کنند. از نقطه نظر مهندسی و به منظور بهسازی فرآیندها و همچنین افزایش تولید محصولات، تحقیق و بررسی پیرامون این پارامترها اهمیت ویژه­ای دارد. به منظور دست یابی به این هدف رویکردهای متفاوتی برای حل مسئله، از جمله روش­های تحلیلی، تجربی و روش­های شبیه­سازی عددی وجود دارد. روش­های حل تحلیلی معادله­ها تنها در شرایط خاصی قادر به حل معادلات مسائل مختلف فرآیندی هستند. معادلاتی که برای این فرآیندها تعریف می­شوند غالبا پیچیده هستند (معمولا این گونه معادلات از معادلات دیفرانسیل جزئی تشکیل شده­اند) و نمی­توان این معادلات را به صورت تحلیلی حل نمود. از سویی دیگر انجام آزمایش­های تجربی به منظور دستیابی به مشخصات سیستم­های تحت بررسی با به کار بردن دستگاه­های ویژه و ابزار متفاوت اندازه­گیری نیز در بسیاری از موارد با مشکلات و محدودیت­هایی از جمله مشکلات اندازه­گیری به دلیل کوچک بودن ابعاد نمونه، ممنوعیت انجام تست­ها به دلایل ایمنی و محیط زیستی و... مواجه است. در کنار روش­های تحلیلی و تجربی در سال­های اخیر روش­های شبیه­سازی عددی به یک روش مستقل و شناخته شده­ی علمی بدل شده­اند. با استفاده از شبیه­سازی عددی، بررسی­ها با استفاده از روش­های محاسبات عددی و بر روی رایانه­ها انجام می­گیرند [1]. روش­های محاسبات عددی بعنوان تکنیک­هایی قدرتمند برای بررسی پدیده­های شیمیایی و فیزیکی و همچنین برای حل مسائل واقعی مهندسی توسعه داده شدند. در سال 1960 و برای اولین بار روش المان محدود ([[2]](#footnote-2)FEM) توسط تورنر و همکارانش به کار گرفته شد. همچنین در همان سال­ها روش اختلاف محدود (FDM[[3]](#footnote-3)) برای حل مسائل دینامیک سیالات نیز استفاده شد. نهایتا در سال 1980 روش حجم محدود (FVM[[4]](#footnote-4)) برای حل مسائل دینامیک سیالات در امپریال کالج توسعه داده شد. در سال 1988 روش شبکه­ی بولتزمن (LBM[[5]](#footnote-5)) توسط مک نامارا و زانتی معرفی شد. معرفی این روش باعث افزایش گستره­ی کاربرد آن بعنوان یک ابزار جایگزین قدرتمند برای حل مسائل دینامیک سیالات شد [2]. این روش از روش اتوماسیون شبکه گاز[[6]](#footnote-6) که یک روش گسسته­ی جنبش ذره­ها است نشات گرفته شده است [3]. روش شبکه بولتزمن برخلاف روش­های حل عددی سنتي دینامیک محاسباتی سیالات ([[7]](#footnote-7)CFD) كه برپایه گسسته­سازی معادلات ماکروسکوپی بنا شده­اند، از مدل­های جنبشي نتیجه شده و سیر تکامل زمانی تابع توزیع ذره که از معادلات هدف ماکروسکوپی تبعیت می­کند را حل می­کند [4]. روش شبکه بولتزمن مزایای ­زیادی دارد. به­کار بردن آن در دامنه­های ­پیچیده آسان است، به آسانی قابلیت کاربرد در شرایط جریان چندفازی و چندماده­ای بدون نیاز به دنبال­کردن فصل­ مشترک­های بین دو فاز را داراست، به­علاوه می­تواند با فرآیندهای ­محاسباتی ­موازی سازگار شود [5]. گستره­ی ­وسیعی از حالت­ها مانند جریان­های ­ناپایا، جدایش فاز، تبخیر، چگالش، خلأزایی[[8]](#footnote-8)، انحلال، انتقال ­حرارت، شناوری و اثرات ­متقابل ­با سطح با استفاده از این روش به­راحتی قابل شبیه­سازی هستند [6]. این روش بعنوان یک روش ­عددی ­موثر برای دینامیک­ محاسباتی ­سیالات به حساب می­آید. همچنین یک ابزار قدرتمند برای مدل­کردن پدیده­های­ فیزیکی­جدیدی که هنوز توسط معادله­های­ ماکروسکوپیک تعریف­ نشده­اند نیز به­شمار می­رود [7]. یکی از اولین کاربردهای روش شبکه بولتزمن توسط کینگدون و سکوفیلد [8] انجام شد. آن­ها یک مدل شبکه بولتزمن دوبعدی را برای شبیه­سازی جریان واکنشی ارائه دادند. آن­ها در توسعه­ی مدل خود فرض کردند که غلظت ذرات واکنش­دهنده درون جریان به اندازه­ای کم است که هم جریان را تحت تاثیر قرار نمی­دهد و هم می­توان از اثرات فصل مشترک چشم­پوشی کرد. اثرات حرارتی و جرمی مانند گرمازا بودن و شناوری نیز در نظر گرفته نمی­شود. آن­ها با استفاده از مدل ارائه شده، انتشار ذره­ها را تنها با در نظر گرفتن تاثیر جریان (فقط جابجایی) بررسی کردند، سپس با توسعه­ی مدل خود، تاثیر نفوذ مولکولی را نیز در مدل خود جای دادند. این مدل می­توانست با تعداد ذرات متنوع و واکنش­های متعدد با درجه­های متفاوت کار کند و با استفاده از روش شبکه بولتزمن معادلات نفوذ را حل کند. بائو و مسکاس [2] با استفاده از روش شبکه بولتزمن چند نمونه مطالعاتی را مورد بررسی قرار داده و نتایج حاصل را با نتایج تحلیلی و تجربی مورد مقایسه قرار دادند. نمونه­ی مطالعاتی اول آن­ها بررسی جریان پوازویی درون کانال دو بعدی بود. برای شبیه­سازی سیستم، بائو و مسکاس برای شرایط مرزی بالا و پایین کانال شرایط مرزی عدم لغزش را به کار بردند که با شرایط مرزی انعکاسی به دلیل وجود مرز جامد تعریف می­شد. شبکه با ابعاد 32\*40 تشکیل شده و ضریب آرامش نیز برابر واحد در نظر گرفته شد. آنها برای راستی آزمایی نتایج مدل خود، نتایج را با نتایج حل تحلیلی مقایسه کردند. نتایج مدل مطابق با نتایج حل تحلیلی بود. در نمونه مطالعاتی دوم آن­ها جریان داخل حفره بسته را مورد مطالعه قرار دادند که سه دیواره ثابت و یک دیواره متحرک دارد. دیواره­ی بالایی با یک سرعت ثابت در زمان صفر به سمت راست شروع به حرکت کرده و سیال داخل حفره به مرور زمان تغییر سرعت را حس کرده و آرایش متناسب را به خود می­گیرد. شبکه با ابعاد 256\*256 تشکیل شده ،ویسکوزیته سینماتیکی و ضریب آرامش به ترتیب برابر 18/1 و 3/2 در نظر گرفته شده و نتایج مدل برای دو عدد رینولدز 400 و 1000 به دست آمد. مدل پیشنهادی، رفتاری مشابه یک مدل واقعی از خود نشان داد. در این مقاله، ابتدا با تشریح مفاهیم کلی روش شبکه­ی بولتزمن ساز و کار محاسباتی این روش توضیح داده خواهد شد. در ادامه، ابتدا رویکرد مورد استفاده برای حل مسائل مختلف انتقال حرارت جابجایی مورد بررسی قرار گرفته و سپس به منظور راستی آزمایی مدل برپایه روش شبکه بولتزمن، نمونه­های مطالعاتی مختلف با مکانیزم­های انتقال حرارت جابجایی اجباری و طبیعی معرفی گردیده و نتایج شبیه­سازی با نتایج پژوهش­های مرجع مقایسه شده و درستی روش شبکه بولتزمن در شبیه­سازی مسائل انتقال حرارت جابجایی مورد بررسی و ارزیابی گرفت.

**2. روش شبکه بولتزمن**

نقطه­ی شروع شبیه­سازی با روش ­شبکه ­بولتزمن معادله­ی آن برای مجموعه­ای از توابع ­توزیع­ ذرات (fi) است که در هر دو بعد مکان و زمان گسسته می­شوند:

|  |  |
| --- | --- |
| *(1)* |  |

c سرعت، t زمان، τ ضریب آرامش[[9]](#footnote-9)، F جمله­ی منبع (نیروی خارجی) و feq تابع توزیع تعادلی است که تابع ماکسول-بولتزمن[[10]](#footnote-10) است. شکل کلی تابع توزیع تعادلی به­صورت زیر است:

|  |  |
| --- | --- |
| (2) |  |

در معادله­ی بالا u سرعت ماکروسکوپی جریان و A، B، C و D ضرایب ثابتی هستند که براساس قوانین بقا (جرم، مومنتوم و انرژی) تعیین می­شوند. Ф نیز معرف متغیر اسکالر مسئله مانند دانسیته، دما (يا انرژی حرارتی ویژه) یا غلظت اجزاء سیستم بوده که برابر مجموع کل توابع توزیع است:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

در معادله­ی (3) n تعداد مولفه­های سرعت مدل شبکه انتخاب شده برای سیستم است. *تابع توزیع تعادلی به همراه زمان آرامش توسط نوع مسئله­ای که قرار است شبیه­سازی شود، تعیین شود. زیبایی معادله بولتزمن در سادگی آن بوده و می­توان آن را برای فیزیک­های متنوعی به سادگی و با تعریف توابع توزیع مختلف و جمله­ی منبع، به کار گرفت. در روش شبکه­ی بولتزمن ضروری است که دامنه­ی حل به یک شبکه تقسیم بندی شود. در هر گره از این شبکه، ذره­های فرضی (تابع توزیع) قرار دارند. بعضی از این ذره­ها در امتداد جهت­های معینی به سمت گره­های مجاور جریان می­یابند. تعداد جهت­گیری­های ممکن هر ذره به آرایش شبکه بستگی دارد.* *در روش شبکه­ی بولتزمن، آرایش شبکه به صورت مختصر با ترکیب* DnQm *نشان داده می­شود که* n *بیانگر بعد مسئله (1 برای یک­بعدی، 2 برای دوبعدی و 3 برای سه­بعدی) و* m *تعداد جهت­های ممکن برای جریان یافتن ذره در هر گره از شبکه است.* مدل مورد استفاده برای مسائل جریان سیال مدل D2Q9 است. *این مدل مولفه­های سرعت بیشتری دارد همچنین ذره­ در گره مرکزی آن سرعتی برابر صفر دارد. توابع توزیع* f0،f1 ،f2 ،f3 ،f4 ،f5 ،f6 ، f7 *و* f8 *به ترتیب دارای سرعت­هایی با مقادیر* c(0,0)، c(1,0)، c(0,1)، c(-1,0)، c(0,-1)، c(1,1)، c(-1,1)، c(-1,-1) و c(1,-1) *و فاکتورهای وزنی* 4/9*،* 1/9*،* 1/9*،* 1/9*،* 1/9*،* 1/36*،* 1/36*،* 1/36 *و* 1/36 *می­باشند [2].*

**2-1. مسائل جابجایی-نفوذ در روش شبکه بولتزمن**

به طور کلی مسائل جابجایی-نفوذ[[11]](#footnote-11) برای متغیر اسکالر C در روش شبکه بولتزمن به دو روش مورد بررسی قرار می­گیرند. در روش نخست فرض می­شود که میدان C بر روی دینامیک سیال تاثیرگذار نیست، به عبارتی سرعت از یک سو توسط دستگاه حل معادله­ی ناویر-استوکس[[12]](#footnote-12) به­دست می­آید و از سویی دیگر چون C وارد معادله­ی ناویر-استوکس نمی­شود، دینامیک سیال از دینامیک C بطور کلی تاثیر نمی­پذیرد. به همین دلیل C یک میدان منفعل[[13]](#footnote-13) نامیده می­شود. این ساده­سازی برای جریان­هایی همانند جریان­های گرمایی[[14]](#footnote-14) جایی که دینامیک سیال می­تواند به شدت تابع میدان دمایی باشد به طور مثال در فرآیندهای تبخیر و جوشش و یا به طور کلی در حالتی که دانسیته یا ویسکوزیته با دما تغییر پیدا می­کنند، کاربردی نیست. در روش دوم فرض می­شود که تغییرات متغیر C بر معادله­ی ناویر-استوکس تاثیر گذار بوده و معادلات بقای سرعت و C باید بطور همزان حل شوند. در ادامه روش دوم را بررسی خواهیم کرد.

***2-2. روش شبکه­ی بولتزمن برای معادلات جابجایی-نفوذ***

*برای حل معادله­ی انتقال مومنتوم با معادله­های جابجایی-نفوذ همانند معادله­های بقای انرژی و یا جرم، دو رویکرد اساسی وجود دارد. رویکرد اول، استفاده از تابع توزیع یگانه است. ممان­های تابع توزیع، دانسیته، دانسیته­ی مومنتوم و دانسیته­ی انرژی را به­دست می­آورند. بنابراین با استفاده از تابع توزیع یگانه گسسته و ممان گرفتن از آن می­توان معادلات ناویر-استوکس و انرژی را بازیابی کرد. بازیابی درست معادله­ی انرژی نیازمند ممان سرعتی سوم و چهارم تابع توزیع است اما شبکه­های استاندارد به کار برده شده برای ناویر استوکس مانند* D2Q9 *و* D3Q19 *مؤلفه­های سرعت کافی برای حل درست ممان­های بالاتر از مرتبه­ی دوم را دارا نیستند این بدین معناست که برای رفع مشکل باید از شبکه­هایی با مؤلفه­های سرعتی بیشتر نظیر* D3Q21 *استفاده شود.* *رویکرد دوم برای حل معادله­ی ناویر-استوکس و معادله­ی انرژی، استفاده از دو تابع توزیع جداگانه است، یکی برای مومنتوم و دیگری برای معادله­ی بقای بعدی همچون معادله­ی بقای انرژی. مزیت اصلی این رویکرد بهبودی پایداری مدل نسبت به مدل تابع توزیع یگانه و همچنین امکان استفاده از شبکه­های استاندارد (مانند* D2Q9 *و* D3Q19*) برای شبیه­سازی در آن است [9]. در این مقاله مسائل با استفاده از مدل تابع توزیع جداگانه برای هر معادله­ی بقا و جفت کردن معادلات با استفاده از جملات منبع حل خواهد شد.*

**2-3. تقریب بوزینسک**[[15]](#footnote-15)

مسئله­ای که در طبیعت و صنعت معمول و مشهود است مسئله­ی دینامیک­های جفت شده­ی مومنتوم و جابجایی-نفوذ در یک جریان گرمایی با دانسیته­ی وابسته به دما است. یکی از بهترین مثال­های اینگونه مسئله­ای، مسائل جابجایی رایلی-بنارد[[16]](#footnote-16) است.

سیالی با ضریب انبساط حرارتی در فشار ثابت معین در دسترس است:

|  |  |
| --- | --- |
| (4) |  |

دانسیته به دما وابسته است و دانسیته در دمای مرجع است. برای ضریب انبساط مثبت، با افزایش دما همانگونه که از بیشتر سیالات انتظار می­رود (مانند گاز ایده­آل) دانسیته کاهش پیدا می­کند (حجم افزایش می­یابد). اگر تغییرات دانسیته با دما کم باشد می­توان فرض کرد که رابطه­ی دما و دانسیته خطی است:

|  |  |
| --- | --- |
| (5) |  |

برای بازه­های بزرگتر دمایی لازم است که یک تابع دقیق­تری برای دانسیته برحسب دما با معرفی یک ضریب انبساط وابسته به دما ، تعریف شود. به مسئله­ی جابجایی رایلی-بنارد برمی­گردیم. فیزیک مسئله شامل دو صفحه­ی موازی است که در فاصله­ی H از یکدیگر قرار دارند، صفحه­ی پایینی در دمایی بالاتر از صفحه­ی بالایی قرار دارد ، بطور همزمان شرط عدم لغزش نیز برای میدان سرعت بر روی مرزهای هردو صفحه برقرار است. در حضور جاذبه­ با شتاب گرانشی g، سیال روی صفحه­ی پایینی به مرور زمان گرم شده و دانسیته­ی آن کاهش می­یابد (*) که باعث ایجاد نیروی شناوری می­شود. اگر گرادیان دمایی به اندازه­ی کافی بزرگ باشد، مقداری از سیال گرم شده و به سمت بالا شروع به حرکت می­کند، به طور همزمان سیال سردی که در مجاورت صفحه­ی سرد بالایی است به سمت پایین منتقل می­شود، این امر به تدریج باعث ایجاد جریان انتقال حرارت جابجایی می­شود. فیزیک جابجایی رایلی-بنارد توسط عدد رایلی [[17]](#footnote-17)*Ra *بیان می­شود:*

|  |  |
| --- | --- |
| (6) |  |

*به ترتیب بیانگر ویسکوزیته­ی سینماتیکی و ضریب نفوذ حرارتی است. با بالا رفتن عدد رایلی، نیروی شناوری بر اتلافات ناشی از ویسکوزیته غلبه کرده و مکانیزم جابجایی برقرار می­شود. حال می­توان با توجه به مطالب گفته شده مسائل جابجایی-نفوذ میدان دما را با استفاده از روش شبکه بولتزمن شبیه­سازی کرد. سرعت موضعی جابجایی* u(x) *توسط معادله­ی روش شبکه­ی بولتزمن برای حل معادله­ی ناویر-استوکس به­دست می­آید. برای جفت کردن دما به معادله­ی ناویر-استوکس نیاز به یک تقریب مناسب است. همانگونه که ذکر شد تغییر کوچک در دما می­تواند منجر به ایجاد نوسان­هایی در دانسیته شود، تقریب**بوزینسک**بیان می­کند که تغییرات کوچک در دانسیته در حضور میدان گرانش با جاذبه­ی* g *باعث ایجاد نیروی شناوری می­شود:*

|  |  |
| --- | --- |
| *(7)* |  |

*در نتیجه دو تابع توزیع تعادلی با در نظر گرفتن تقریب بوزینسک به صورت زیر تعریف می­شوند:*

*معادله­ی انتقال مومنتوم:*

|  |  |
| --- | --- |
| *(8)* |  |

Fb *نیروی شناوری است و به صورت زیر تعریف می­شود:*

|  |  |
| --- | --- |
| *(9)* |  |

*معادله­ی جابجایی-نفوذ که در این مثال معادله­ی انرژی است به­صورت زیر است:*

|  |  |
| --- | --- |
| *(10)* |  |

Qi جمله­ی منبع است که می­تواند بنا به مشخصات مسئله بیانگر گرمایش ویسکوزی، کار تراکم و یا گرمای واکنش باشد. برای حل معادله­ی انتقال جرم نیز یک تابع توزیع جداگانه در نظر گرفته و در صورت وجود واکنش شیمیایی، واکنش شیمیایی در قالب جمله­ی منبع به معادله اضافه می­شود. برای به دست آوردن ضرایب آرامش معادلات نیز با استفاده از بسط چپمن-انسکوگ[[18]](#footnote-18) ضرایب آرامش بصورت زیر بدست می­آیند:

|  |  |
| --- | --- |
| *(11)* |  |

[10]. با برابر واحد در نظر گرفتن مقادیر طول گام­های مکانی و زمانی، شکل نهایی ضریب آرامش به شکل زیر محاسبه می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
| *(12)* |  |

ضرایب آرامش معادله­های انرژی و جرم نیز بصورت مشابه به­دست می­آیند، برای معادله­ی انرژی ضریب آرامش به ضریب نفوذ حرارتی α وابسته بوده و به شکل زیر به­دست می­آید [11]:

|  |  |
| --- | --- |
| *(13)* |  |

**4-2. شرایط مرزی**

شرایط مرزی برای محاسبه­ی هر کمیت معناداری ضروری و لازم هستند. در این بخش، جزئیات مربوط به شرایط مرزی انعکاسی**[[19]](#footnote-19)**، شرایط مرزی نیومان[[20]](#footnote-20)، دیریکله[[21]](#footnote-21) و شرایط مرزی یوشینو و اینامورو**[[22]](#footnote-22)** شرح داده خواهد شد.

**1-4-2. شرایط مرزی انعکاسی**

اصول شرایط مرزی انعکاسی بر این استوار است که در خلال فرآیند جریان یافتن، توابع توزیعی که به مرز جامد برخورد می­کنند به مکانی که از آن جریان یافته­اند منعکس می­شوند. برای این توابع توزیع، مرحله­ی جریان یافتن با جمله­ی زیر جایگزین می­شود [9]:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (14) |

**2-4-2. شرایط مرزی نیومان**

زمانی که در مرزها شار اعمال شده باشد، از شرط مرزی نیومن برای تعریف آن استفاده می­شود. یک بردار سرعت تشکیل شده از مولفه­های سرعت در جهت x و y بصورت u0=(u0,ν0) معلوم است و با استفاده از آن دانسیته یا فشار براساس شرایط داخل دامنه­ی حل محاسبه می­شوند [12].

**3-4-2. شرایط مرزی دیریکله**

از شرط مرزی دیریکله هنگامی استفاده می­شود که در مرز دانسیته (یا فشار) ρ0 معلوم بوده و با استفاده از آن سرعت محاسبه می­شود [12].

**4-4-2. شرایط مرزی یوشینو و اینامورو**

یوشینو و اینامورو [13] نوعی شرط مرزی را معرفی کردند که می­توان آن­ را برای مسائل جابجایی-نفوذ برای میدان اسکالر دلخواه C (مانند دما، غلظت) به کار برد. بعد از مرحله­ی جریان یافتن، همچنان تعدادی نقاط بر روی گره­های مرزی (مانند دیواره­ها و مرزهای ورودی و خروجی) مجهول باقی می­مانند. در این روش با استفاده از مفهوم فاکتور وزنی[[23]](#footnote-23) این نقاط را می­توان به گونه­ای به دست آورد که مقدار میدان اسکالر دلخواه C (مانند دما، غلظت) در این گره­های مرزی ثابت بماند [12].

**3. الگوریتم حل و کد نویسی**

حل مسئله و کدنویسی آن ابتدا با تعریف مقادیر معلوم مسئله آغاز می­شود. در شکل 1 فرآیند کلی حل نشان داده شده است.

|  |
| --- |
|  |
| شکل 1. الگوریتم حل مسئله |

در ابتدا باید سرعت، ویسکوزیته و تقسیم­بندی­های شبکه تعیین ­شوند. شبیه­سازی در روش شبکه­ی بولتزمن در فضایی انجام می­گیرد که تمامی متغیرهای فیزیکی توسط اعداد بی­بعد تعریف می­شوند. روش شبکه­ی بولتزمن معادلات ناویر-استوکس جریان­های تراکم ناپذیر را برای اعداد ماخ پایین شبیه­سازی می­کند. برای حل دقیق، عدد ماخ باید در مقادیر کوچک نگه­داشته شود. از طرفی با توجه به این حقیقت که براساس قانون تشابه[[24]](#footnote-24) در دینامیک سیالات، دو سیستم­ مشخص جریان تراکم ناپذیر با هندسه­ی مشابه و عدد رینولدز یکسان از نظر دینامیکی با یکدیگر مشابه­اند [14] با انتخاب دلخواه مقادیر سرعت و ویسکوزیته (با هدف پایین نگه­داشتن عدد ماخ) و با ثابت قرار دادن عدد رینولدز بین سیستم واقعی و فضای روش شبکه­ی بولتزمن تقسیم­بندی­های شبکه تعیین می­شوند. با تعریف این پارامترها در مرحله­ی بعد اعداد بدون بعد مسئله همانند عدد پرانتل، رایلی و... را تعریف کرده و سپس پارامترهای روش شبکه­ی بولتزمن مانند ضرایب آرامش، فاکتورهای وزنی، مولفه­های سرعت توابع توزیع ci در جهات x و y و دیگر پارامترهای مهم در حل مسئله تعیین می­شوند. برای شروع فرآیند حل و ورود به حلقه­ی زمانی ابتدا نیاز است که شرایط اولیه تعیین شوند. بعنوان یک فرض اولیه­ی مناسب، شرایط اولیه شرایط تعادلی فرض می­شود. بعد از تعریف شرایط اولیه، الگوریتم حل وارد حلقه­ی زمانی می­شود. اولین پارامترهایی که باید توسط روش شبکه­ی بولتزمن محاسبه شوند، پارامترهای سرعت و دانسیته در تمامی نقاط سیستم هستند. در مرحله­ی بعد که مرحله­ی برخورد[[25]](#footnote-25) نام دارد توابع تعادلی محاسبه شده و ضرایب آرامش اعمال می­شوند. برای شبیه­سازی فرآیند انتشار ذرات خیالی بعد از برخورد صورت گرفته، فرآیند جریان یافتن[[26]](#footnote-26) انجام می­شود. مرحله­ی بعد، اعمال شرایط مرزی جانبی همانند شرایط مرزی انعکاسی[[27]](#footnote-27) در مرزهای جامد است. در اینجا توابع توزیع و مولفه­های سرعت محاسبه شده و با بازگشت به ابتدای حلقه­ی زمانی، مقدار دانسیته و سرعت ماکروسکوپی به روز می­شوند. بعد از آن سرعت و دانسیته­ی ماکروسکوپی محاسبه شده و در دسترس است. در مرحله­ی بعد برای حل معادلات بقای انرژی و یا جرم یا هردو، خروجی­های قسمت اول فرآیند حل یعنی سرعت و دانسیته، بعنوان مقادیر معلوم ورودی برای حل معادلات بقای انرژی و یا جرم در اختیار این معادلات قرار داده می­شوند و بدین ترتیب مراحل حل همانند قسمت اول ادامه می­یابند. در این مقاله کدنویسی مسائل مختلف به­وسیله­ی نرم­افزار Matlab انجام شده و این کدها توسط یک سیستم رایانه­ای با سیستم عامل 64 بیتی ویندوز 10، سی پی یو 5 هسته­ای اینتل 6200U و رم 8 گیگ اجرا شده است.

**4. مسائل مورد بررسی**

**4-1. نمونه مطالعاتی اول: جریان انتقال حرارت جابجایی اجباری درون کانال دوبعدی**

اولین نمونه مطالعاتی به مسئله­ی انتقال حرارت درون یک کانال دوبعدی می­پردازد. هدف از انتخاب این مسئله، راستی آزمایی مدل شبکه­ی بولتزمنی برای حل معادله­ی مومنتوم و انرژی است. در این نمونه یک سیال با دمای بالا درون یک کانال دوبعدی با ارتفاع H و طول L=2H جریان می­یابد. جریان گرم­ وارد کانال شده و دیواره­های بالایی و پایینی کانال در دمای ثابت و سرد قرار دارند. شرایط مرزی استفاده شده در این مسئله بدین صورت است که برای میدان سرعت در مرزهای جامد، از شرط مرزی انعکاسی و برای ورودی و خروجی کانال شرایط مرزی نيومان و دیریکله استفاده شده است. برای میدان دمایی نیز در هر چهار مرز کانال شرایط مرزی "یوشینو و اینامورو" برقرار شده است.

|  |
| --- |
| H  L=2H  T=TW  U=uin, T=Tin  T=TW |
| شکل 2. شمای کلی فیزیک سیستم نمونه اول مطالعاتی |

هدف از انتخاب این مسئله بررسی مکانیزم انتقال حرارت جابجایی اجباری است. در انتقال حرارت جابجایی اجباری به دلیل وجود سرعت خارجی در جهت x، نیروهای شناوری قابل چشم­پوشی بوده و از این رو میدان­های سرعت و دما به­صورت جداگانه حل می­شوند. با استفاده از آنالیز ابعادی تابعیت سرعت و دمای بی­بعد سیال درون کانال بصورت زیر به­دست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
| *(15)* |  |
| (16) |  |

در معادلات (15) و (16)، Re، Pr و Ec به ترتیب بیانگر اعداد بی­بعد رینولدز[[28]](#footnote-28)، پرانتل[[29]](#footnote-29) و اکرت[[30]](#footnote-30) هستند.

**4-2. نمونه مطالعاتی دوم: جریان جابجایی آزاد در داخل یک حفره­ی دوبعدی**

دومین نمونه مطالعاتی به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد می­پردازد. در مسائل انتقال حرارت جابجایی آزاد یا طبیعی، معادلات مومنتوم و انرژی به­صورت همزمان حل می­شوند. هدف از انتخاب این مسئله راستی آزمایی مدل برپایه­ی روش شبکه­ی بولتزمن برای حل همزمان دو معادله­ی مومنتوم و انرژی و بررسی تاثیر پارامترها و اعداد بدون بعد بر سرعت و دمای سیستم است. فیزیک مسئله به این گونه است که درون یک حفره مربعی شکل با سیالی پرشده است (شکل 3). این حفره از چهار جهت بسته است و دیواره­های بالا و پایینی حفره عایق و دیواره­ی سمت چپ در دمای ثابت و گرم Th و دیواره­ی سمت راست در دمای ثابت و سرد Tc قرار دارد. در حل این مسئله از شرایط مرزی متنوعی برای هر دو میدان مومنتوم و دما استفاده شده است. برای میدان مومنتوم از شرط مرزی نيومان برای دیواره­ی بالایی و شرط مرزی انعکاسی برای سه دیواره­ی دیگر حفره استفاده شد. شرایط مرزی میدان دمایی نیز در روی هر چهار دیواره با استفاده از شرایط مرزی "یوشینو و اینامورو" تعریف شد.

|  |
| --- |
| a  a  u=v=0  T=TH=1  u=v=0  T=TC=0  u=v=0  u=v=0  //////////////////////////////////////////////////////  //////////////////////////////////////////////////////  g |
| شکل 3. شمای کلی فیزیک سیستم نمونه دوم مطالعاتی |

در لحظه­ی صفر و با اعمال شرایط مرزی، سیال نزدیک به دیواره­ی گرم به تدریج گرم شده و با کاهش دانسیته­ی آن به سمت بالا شروع به حرکت می­کند و چون حفره بسته است به حرکت خود ادامه داده و در تماس با دیواره­ی سرد قرار می­گیرد. در اینجا سیال گرم شروع به سرد شدن کرده و به سمت پایین حرکت می­کند. این حرکت باعث ایجاد سرعت و حرکت دورانی درون حفره می­شود. این مسئله با استفاده از روش شبکه­ی بولتزمن شبیه­سازی خواهد شد و نتایج شبیه­سازی مورد بررسی قرار گرفته و با نتایج پژوهش­های قبلی مورد مقایسه قرار خواهند گرفت. این مسئله یک مسئله­ی انتقال حرارت جابجایی آزاد است، برخلاف نمونه­ی قبلی، در انتقال حرارت با مکانیزم جابجایی آزاد، میدان مومنتوم و میدان دما به صورت جفت شده بوده و بصورت همزمان حل می­شوند، به بیانی دقیق­تر حل همزمان این دو میدان به این معناست که یک یا چند متغیر در طی مراحل حل یک میدان بصورت خروجی در اختیار معادله­ی حل میدان دیگر قرار گرفته و این فرآیند حل تا رسیدن به نتایج ادامه پیدا می­کند. در اینجا متغیر سرعت پس از حل معادله­ی مومنتوم در ابتدای فرآیند حل، در اختیار معادله­ی دما قرار گرفته و دما به دست می­آید، سپس دما از طریق جمله­ی نیروی حجمی موجود در معادله­ مومنتوم (تقریب بوزینسک) در اختیار معادله­ی مومنتوم قرار می­گیرد و تاثیر دما بر میدان سرعت از این طریق در نظر گرفته می­شود. بررسی پدیده­ي انتقال حرارت جابجايي طبیعی با حل مسئله برای اعداد گوناگون رایلی انجام می­گیرد و نتایج با نتایج موجود در پژوهش­های قبلی، راستی آزمایی می­شود.شرایط مرزی سیستم به این گونه است که در دیواره­ی بالایی و پایینی شرط مرزی آدیاباتیک و در دیواره­ی سمت چپ با دمای گرم و دیواره­ی سمت راست با دمای سرد، شرایط مرزی دما ثابت برقرار است. وابستگی سرعت و دمای بی­بعد سیال نیز بصورت زیر است:

|  |  |
| --- | --- |
| (17) |  |

**5. نتایج**

**1-5. مقدمه**

در این بخش نتایج مربوط به شبیه­سازی نمونه­های مطالعاتی به­وسیله­ی روش شبکه­ی بولتزمن تشریح شده و به منظور راستی آزمایی، نتایج روش با ابزارهای متفاوتی راستی آزمایی خواهد شد که در ادامه شرح داده خواهد شد.

**2-5. نمونه مطالعاتی اول**

مسئله­ی جریان انتقال حرارت جابجایی اجباری درون کانال دوبعدی، یک مسئله­ی پایه برای راستی آزمایی مدل شبکه بولتزمنی حل معادلات سرعت و دما است. به منظور راستی آزمایی و مقایسه با نتایج پژوهش مرجع، عدد رینولدز و عدد پرانتل به­ترتیب برابر 10 و 7/0 در نظر گرفته شده­اند. مشخصات کامل سیال ورودی به کانال در جدول 1 گزارش شده است:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| جدول 1. مشخصات سیال ورودی به کانال در نمونه مطالعاتی اول | | | | |
| Pr | Re | ρout (kg/m3) | Tin (°C) | Uin (m/s) |
| 0.7 | 10 | 1.2 | 20 | 0.01 |

با توجه به محدودیت­های ذکر شده برای انتخاب مقادیر متغيرها، مقادیر به این شرح انتخاب شدند که سرعت ورودی بی­بعد برابر u'=0.0165 *و دمای ورودی بی­بعد برابر* T'=1 *قرار داده شد. همچنین دمای بی­بعد دیواره­های بالایی و پایینی کانال برابر* T'=0 *در نظر گرفته شده و کانال به یک شبکه­ی 100\*200 تقسیم بندی شد.* با ثابت نگه­داشتن عدد رینولدز برابر 10، ویسکوزیته برابر 165/0 به­دست می­آید. کدنویسی این مسئله توسط نرم­افزار متلب انجام شده و گام­های زمانی به منظور رسیدن به حالت پایا، به مقدار کافی در نظر گرفته شد. در اینجا نتایج به­دست آمده با نتایج پژوهش تانگ و همکاران [15] که مسئله را با روش حجم محدود شبیه­سازی کرده­اند، مقایسه خواهد شد. بدین منظور در راستای طول کانال سه بخش را انتخاب کرده و سرعت بی­بعد و دمای بی­بعد این سه بخش برحسب ارتفاع کانال رسم شده است. این سه بخش به ترتیب در x=0.02، x=0.1 و x=1 انتخاب شدند. در ابتدا نمودار سطحی سرعت بی­بعد رسم شد:

|  |
| --- |
|  |
| شکل 4. نمودار سطحی سرعت بی­بعد جریان درون کانال برای عدد رینولدز برابر با 10 |

همانگونه که در نمودار­ها پیداست جریان در ابتدای ورود به کانال مسافتی را طی نموده و سپس کاملا توسعه یافته شده است. همچنین توزیع سرعت در جهت y بصورت سهموی بوده و الگوی جریان پوازی در کانال حاکم است که با توجه به فیزیک مسئله انتظار این امر نیز می­رفت. در شکل 5 نمودار سرعت بی­بعد برحسب y در بخش­های مختلف کانال رسم شده و با نتایج حاصل از پژوهش تانگ و همکاران [18] مقایسه شده است:

|  |
| --- |
|  |
| شکل 5. نمودار سرعت بی­بعد برحسب ارتفاع کانال در بخش­های مختلف کانال |

خطوط نتایج پژوهش حاضر و نقاط نتایج پژوهش مرجع است. همانگونه که مشخص است نتایج تطابق بسیار خوبی با یکدیگر دارند. در مرحله­ی بعدی حل مسئله، دما در نقاط مختلف شبکه به دست آمد. در شکل­6 نمودار دمای بی­بعد کانال رسم شده است:

|  |
| --- |
|  |
| شکل 6. نمودار سطحی دمای بی­بعد جریان درون کانال برای عدد رینولدز برابر با 10 |

در اینجا نیز رشد لایه­ی مرزی دمایی قابل مشاهده است. همچنین نمودار توزیع دما كه برحسب دمای میانگین Tm بی­بعد شده است برحسب y در بخش­های مختلف کانال رسم شده و با نتایج حاصل از پژوهش تانگ و همکاران مقایسه شده است (شکل 7):

|  |
| --- |
|  |
| شکل 7. نمودار توزیع دمای بی­بعد جریان درون کانال برای رینولدز 10 در بخش­های متفاوت کانال |

در شكل 7 نتایج شبیه­سازی با نتایج پژوهش مرجع تطابق دارد که نشان از دقت و درستی مدل ارائه شده دارد.

**3-5. نمونه مطالعاتی دوم**

در مسئله­ی جابجایی آزاد درون حفره دوبعدی، شرایط به این گونه است که در زمان صفر، دیواره­ی سمت چپ در دمای گرم Th و دیواره­ی سمت راست نیز در یک دمای سردتر Tc قرار می­گیرد. پس از لحظه­ی صفر و با گرم شدن تدریجی سیال درون حفره، سیال گرم به دلیل کاهش دانسیته، با سمت بالا منتقل شده و سیال با دمای پایین­تر به دلیل دانسیته بیشتر به سمت پایین حرکت می­کند، این حرکت باعث ایجاد تلاطم می­شود. در اینجا فرض می­شود که حفره­ی مورد نظر، با سیالی با عدد پرانتل Pr=0.71 پرشده است. مشخصات کامل سیال در جدول 2 گزارش شده است [16]:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| جدول 2. مشخصات سیال نمونه دوم مطالعاتی | | | | | | |
| Tc (°C) | TH (°C) | g (m2/s) | Pr | β (1/K) | μ (Pa.s) | ρ (kg/m3) |
| 2 | 12 | 9.81 | 0.71 | 0.00341 | 1.8 x 10-5 | 1.19 |

حل مسئله با تقسیم ابعاد سیستم به یک شبکه 128\*128 انجام می­شود، همچنین مسئله برای سه عدد مختلف رایلی 103، 104، 105 حل شده و نتایج بررسی خواهد شد. همانگونه که در بخش­های پیشین گفته شد برای اجرای کد مسئله، مشخصات فیزیکی سیال باید به گونه­ای مناسب بی­بعد شوند. ویسکوزیته سینماتیکی ν با حدس و خطا و با هدف پایداری فرآیند حل، به صورت دلخواه انتخاب می­شود. با ثابت نگه­داشتن عدد پرانتل، ضریب نفوذ حرارتی α مشخص می­شود. بقیه­ی مقادیر برحسب این دو پارامتر و با ثابت نگه داشت عدد رایلی به­دست می­آیند. مقادیر پارامترهای بی­بعد بر حسب عدد رایلی به صورت خلاصه در جدول 3 گزارش شده است:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| جدول 3. مقادیر پارامترهای بی­بعد نمونه مطالعاتی دوم برحسب عدد رایلی | | | | | | | |
| Ra | lattices | ρ' | gβ' | ν' | α' | Th' | Tc' |
| 103 | 128x128 | 1 | 2.9789 x10-4 | 0.666 | 0.938 | 1 | 0 |
| 104 | 128x128 | 1 | 0.0017 | 0.5 | 0.704 | 1 | 0 |
| 105 | 128x128 | 1 | 8.2748 x10-4 | 0.111 | 0.156 | 1 | 0 |

رژیم جریان جابجایی طبیعی توسط عدد رایلی تعیین می­شود. عدد رایلی با عدد ناسلت به­صورت زیر رابطه دارد:

|  |  |
| --- | --- |
| (18) |  |

عدد ناسلت در واقع نسبت انتقال حرارت جابجایی سیال به انتقال حرارت هدایتی آن است [17]:

|  |  |
| --- | --- |
| (19) |  |

بنابراین می­توان نتیجه گرفت که در پرانتل ثابت، عدد رایلی با عدد ناسلت رابطه­ی مستقیم دارد. بعنوان نتیجه، در اعداد رایلی پایین انتقال حرارت با مکانیزم هدایتی انجام می­گیرد. با افزایش عدد رایلی، سرعت سیال بالا رفته و انتقال حرارت جابجایی حاکم می­شود. برای صفحات بسته که در آنها صفحات عمودی در دماهای ثابت سرد و گرم قرار دارند، در رایلی کوچکتر از 1000 انتقال حرارت با مکانیزم هدایتی انجام می­گیرد و در نتیجه توزیع دما بصورت خطی است [18]. در اینجا ابتدا شبیه­سازی مسئله برای عدد رایلی 1000 انجام شده و نتایج با نتایج پژوهش گو و همکاران [1] مقایسه خواهد شد. و سپس برای اعداد رایلی بالاتر نیز نتایج گزارش خواهد شد. زمان کافی برای حل مسئله تا رسیدن به جواب­های پایدار در نظر گرفته شده است. نتایج شبیه­سازی برای عدد رایلی برابر 1000 در جدول 4 گزارش شده است. uxmaxحداکثر سرعت افقی سیال درون حفره در بخش x=0.5 و ymax مکان آن روی محور عمودی حفره است. uymax حداکثر سرعت عمودی سیال درون حفره در بخش y=0.5 و xmax مکان آن روی محور افقی حفره است. Numax عدد ناسلت موضعی بر روی دیواره­ی سرد و yNu مکان آن روی دیواره­ی سرد است. Nuave نیز عدد ناسلت میانگین در طول دیواره­ی سرد حفره است. عدد ناسلت موضعی و میانگین بر روی دیواره­ی عمودی توسط روابط زیر محاسبه می­شوند [19]:

|  |  |
| --- | --- |
| (20) |  |
| (21) |  |

در جدول 4 و 5 نتایج شبیه­سازی با نتایج پژوهش­ گو و همکاران [1] که برای حل مسئله از روش شبکه­ی بولتزمن استفاده کرده­اند و نتایج پژوهش هورتمن و همکاران [16] که مسئله را با استفاده از روش حجم محدود حل کرده­اند است، مقایسه شده اند:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| جدول 4. نتایج شبیه­سازی برای عدد رایلی برابر با 1000 | | | | | | | | |
| Ra |  | uxmax | ymax | uymax | xmax | Numax | yNu | Nuave |
| 103 | Simulation | 3.544961 | 0.8125 | 3.613342 | 0.1875 | 1.49 | 0.890625 | 1.114 |
|  | Gou et al. | 3.6554 | 0.8125 | 3.6985 | 0.1797 | 1.5004 | 0.90625 | 1.1168 |
|  | %error | 3.02 | 0.0 | 2.3 | 4.3 | 0.69 | 1.72 | 0.25 |

همانگونه که ملاحظه می­شود اعداد تطابق بسیار خوبی با یکدیگر دارند. با افزایش عدد رایلی گردش سیال درون حفره با سرعت بیشتری انجام می­شود و انتقال حرارت کاملا بصورت جابجایی طبیعی انجام می­گیرد تا جایی که جریان از عدد رایلی 1000000 به بالا به تدریج وارد رژیم متلاطم می­شود که در آن سرعت در نواحی مرکزی حفره بسیار کم بوده و سیال در ناحیه­های کناری دیواره­ها سرعت بالاتری دارد که این باعث می­شود که دما در ناحیه­ی مرکزی حفره تغییرات کمتری داشته باشد. در جدول 5 نتایج برای اعداد رایلی 10000 و 100000 گزارش شده است. در اینجا نیز تطابق میان نتایج شبیه­سازی و نتایج پژوهش های مرجع مشهود است:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| جدول 5. نتایج شبیه­سازی برای اعداد رایلی برابر با 10000 و 100000 | | | | | | | | | | |
| 105 | | | | | 104 | | | | | Ra |
| %err | Hourtmann et al. | %err | Gou et al. | simulation | %err | Hourtmann et al. | %err | Gou et al. | simulation |  |
| 2.5 | 34.7399 | 2.26 | 34.8343 | 35.6244 | 0.632 | 16.1802 | 1.28 | 16.0761 | 16.28247 | umax |
| 0.4 | 0.8558 | 0.003 | 0.8594 | 0.859375 | 0.2 | 0.8265 | 0.95 | 0.8203 | 0.828125 | ymax |
| 0.9 | 68.6396 | 1.46 | 68.2671 | 69.26592 | 1.49 | 19.6295 | 1.45 | 19.6368 | 19.92345 | vmax |
| 19 | 0.0657 | 25 | 0.0625 | 0.078125 | 4.7 | 0.1193 | 6.5 | 0.1172 | 0.125 | xmax |
| 0.24 | 7.7201 | 1.2 | 7.7951 | 7.701 | 0.76 | 3.5309 | 1.8 | 3.5715 | 3.504 | Numax |
| 0.42 | 0.918 | 0.42 | 0.9219 | 0.914063 | 0.74 | 0.8531 | 0.003 | 0.8594 | 0.859375 | yNu |
| 1.85 | 4.5216 | 1.56 | 4.5345 | 4.6053 | 0.4 | 2.2442 | 0.55 | 2.2477 | 2.2354 | Nuave |

در عدد رایلی 100000 نتایج نسبت به اعداد رایلی قبلی درصد خطای بیشتری دارند که این به دلیل آن است که رژیم جریان نزدیک رژیم متلاطم است. شکل 8 نمودار منحنی­های دمای بی­بعد در بخش مرکزی حفره­ را برحسب طول حفره x در اعداد رایلی مختلف نشان مي­دهد:

|  |
| --- |
|  |
| شکل 8. نمودار منحنی­های دمای بی­بعد در بخش مرکزی حفره برحسب طول حفره x در اعداد رایلی مختلف |

با توجه به رابطه­ی (18) با کاهش عدد رایلی عدد ناسلت کاهش می­یابد و این بدین معناست که انتقال حرارت هدایتی مکانیزم حاکم انتقال حرارت است. در رایلی کوچکتر از 1000 انتقال حرارت با مکانیزم هدایتی انجام می­گیرد و در نتیجه توزیع دما بصورت خطی است. به همین دلیل همانگونه که در نمودار شکل 8 مشخص است توزیع دما برای رایلی برابر 1000 به­صورت خطی است. با افزایش عدد رایلی کم کم سیال سرعت گرفته و انتقال حرارت با مکانیزم جابجایی طبیعی انجام می­شود و توزیع دما غیرخطی می­شود. همچنین همانگونه که ذکر شد با افزایش عدد رایلی سرعت سیال در ناحیه­ی مرکزی سیال کمتر و کمتر شده و ناحیه­ی دارای سرعت کم و ثابت بزرگتر می­شود و به همین دلیل انتقال حرارت در آن ناحیه کمتر شده و دما تقریبا ثابت مانده و شیب منحنی دمایی به سمت صفر میل می­کند. لازم به ذکر است که در نمودار شکل 8 خطوط نمایشگر نتایج شبیه­سازی و نقاط نتایج پژوهش باراکوس و میتسولیس [20] است. همچنین نمودار سطحی دمای بی­بعد سیال درون حفره نیز توسط نرم افزار متلب رسم شده و در شکل 9 نمایش داده شده است:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| C:\Users\Lenovo\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\T.JPG | T | T |
| Ra= 100000 | Ra= 10000 | Ra= 1000 |
| شکل 9. نمودار سطحی دمای بی­بعد سیال درون حفره در اعداد رایلی 1000 ، 10000 و 100000. | | |

همانگونه که قبلا توضیح داده شد از چپ به راست با افزایش عدد رایلی منحنی­های ایزوتزم در درجه­ی اول غیرخطی شده و همچنین شیب این منحنی­ها در ناحیه­ی مرکزی حفره به سمت صفر میل می­کند که در شکل 9 این امر مشهود است.

**6. نتیجه گیری**

در این مقاله حل معادلات انتقال مومنتوم و حرارت با استفاده از روش شبکه بولتزمن بررسی شد. روش شبکه­ی بولتزمن معادلات ناویر-استوکس را برای اعداد ماخ پایین حل می­کند بنابراین برای همگرایی و دقت حل حتما باید از پایین بودن عدد ماخ اطمینان حاصل کرد. این مهم با انتخاب مقادیر پایین عدد رینولدز حاصل می­شود. در واقع سرعت انتخاب شده در فضای شبکه­ی بولتزمن باید عدد پایینی باشد و بخاطر اینکه عدد رینولدز باید بین فضای واقعی و فضای روش شبکه بولتزمن ثابت باشد، یا باید ویسکوزیته­ی سینماتیکی کوچک انتخاب شود یا اینکه شبکه ریزتر تقسیم­بندی شود. انتخاب ویسکوزیته­ی سینماتیکی کوچکتر باعث فاصله گرفتن پارامتر ضریب آرامش از عدد یک می­شود که این امر منجر به ایجاد مشکلاتی در همگرایی می­شود. بنابراین در رینولدز های بالا راه حل اساسی تقسیم­بندی شبکه به قسمت­های بیشتر است که این باعث بالا بردن زمان حل مسئله می­شود. برای بقیه­ی معادلات نیز همین امر صادق است. بعنوان مثال در نمونه­ی مطالعاتی اول، ضریب آرامش معادله­ی انتقال حرارت که وابسته به ضریب نفوذ حرارتی است باید مقداری نزدیک به واحد داشته باشد، برهمین اساس عدد پرانتل در مسائل انتقال حرارت باید نزدیک به عدد واحد باشد تا مقدار ضریب نفوذ حرارتی مقداری نزدیک به ویسکوزیته­ی سینماتیکی داشته باشد. در مسائل انتقال حرارت جابجایی طبیعی یا آزاد، مهم­ترین عدد، عدد رایلی است. این عدد رژیم جریان را مشخص می­کند. علاوه بر اینکه عدد پرانتل می­بایست نزدیک واحد باشد، در این مسائل عدد رایلی اگرکه به گونه­ای باشد که جریان آرام برقرار باشد، سیستم از نظر همگرایی مشکلی نخواهد داشت، با بالا رفتن عدد رایلی و نزدیک و نزدیک­تر شدن رژیم جریان به جریان متلاطم، خطای محاسبات بیشتر می­شود و همگرایی نیز با انتخاب دقیقتر پارامترهایی همچون ویسکوزیته سینماتیکی حاصل می­شود.

**7. چکیده انگلیسی**

**Simultaneous Solution of Momentum And Heat Transfer Equations For Forced and Natural Heat Convection By Lattice Boltzmann Method**

**A. Saki1, Z. Mansourpour2\***

1,2 Faculty Of Chemical Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

\*Mansourp@ut.ac.ir

**Abstract:**

In recent years, with the developments that have taken place in the field of computer tools, the study of the behavior of various phenomena such as the study of fluid behavior that is associated with momentum, heat, mass transfer and chemical reaction, has become easier. one method of simulating fluid behavior is the lattice Boltzmann method. In this article, after a complete description of the method and review of the previous researches, the solution of Momentum and heat transfer equations for Forced and Natural Heat Convection case studies has been performed by the lattice Boltzmann method and the results obtained have been verified. In the first and second case studies, the study of forced heat transfer and natural heat transfer is described. The approach used to solve the problems is to use separate distribution functions for each of the conservation equations. For problems that affect the conservation equations (such as natural heat transfer), the equations are also paired by adding a source term to the equations. The effect of dimensionless numbers on the systems was also investigated by changing the effective dimensionless numbers. The results of similar researches or numerical solution results were used to verify the simulation results. The results obtained in most cases were in good agreement with the reference results and in other cases the difference between the two results was acceptable. Finally, the strengths and limitations of using the lattice Boltzmann method were described.

**Keywords**: momentum conservation, forced convection heat transfer, natural convection heat transfer, lattice boltzmann method

**8. مراجع**

1. Guo, Z., Shi, B., & Zheng, C. (2002). A coupled lattice BGK model for the Boussinesq equations. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 39(4), 325-342.
2. Mohamad, A. A. (2011), Lattice Boltzmann Method (Vol. 70), Springer, London, 195.
3. Kang, Q., Lichtner, P. C., & Zhang, D. (2006). Lattice Boltzmann pore‐scale model for multicomponent reactive transport in porous media. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *111*(B5).
4. Di Rienzo, A. F. (2012). Mesoscopic numerical methods for reactive flows: lattice Boltzmann method and beyond. *Ph. D. Thesis*.
5. Girimaji, S. (2013). Lattice Boltzmann method: Fundamentals and engineering applications with computer codes.
6. Sukop, M. (2006). DT Thorne, Jr. Lattice Boltzmann Modeling Lattice Boltzmann Modeling (pp. 14-17). Heidelberg, Berlin, New York: Springer.
7. Chen, S., & Doolen, G. D. (1998). Lattice Boltzmann method for fluid flows. Annual review of fluid mechanics, 30(1), 329-364.
8. Kingdon, R. D., & Schofield, P. (1992). A reaction-flow lattice Boltzmann model. Journal of Physics A: Mathematical and General, 25(14), L907.
9. Krüger, T., Kusumaatmaja, H., Kuzmin, A., Shardt, O., Silva, G., & Viggen, E. M. (2017). The lattice Boltzmann method. Springer International Publishing, 10(978-3), 4-15.
10. McCullough, J. W. S., Aminossadati, S. M., & Leonardi, C. R. (2020). Transport of particles suspended within a temperature-dependent viscosity fluid using coupled LBM–DEM. International Journal of Heat and Mass Transfer, 149, 119159.
11. Mohebbi, R., Rashidi, M. M., Izadi, M., Sidik, N. A. C., & Xian, H. W. (2018). Forced convection of nanofluids in an extended surfaces channel using lattice Boltzmann method. International Journal of Heat and Mass Transfer, 117, 1291-1303.
12. Bartlett, S. (2017). A non-isothermal chemical lattice Boltzmann model incorporating thermal reaction kinetics and enthalpy changes. Computation, 5(3), 37.
13. Inamuro, T., Yoshino, M., Inoue, H., Mizuno, R., & Ogino, F. (2002). A lattice Boltzmann method for a binary miscible fluid mixture and its application to a heat-transfer problem. Journal of Computational Physics, 179(1), 201-215.
14. Batchelor, G. K. (1989). Fluid Mechanics. By LD LANDAU and EM LIFSHITZ. 2nd English edition. Pergamon Press, 1987. 539 pp.£ 45 or 29.50 (Paperback). Journal of Fluid Mechanics, 205, 593-594.
15. Tang, G. H., Tao, W. Q., & He, Y. L. (2003). Simulation of fluid flow and heat transfer in a plane channel using the lattice Boltzmann method. International journal of modern physics B, 17(01n02), 183-187.
16. Hortmann, M., Perić, M., & Scheuerer, G. (1990). Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: bench‐mark solutions. International journal for numerical methods in fluids, 11(2), 189-207.
17. Forsberg, C.H., 2020, Heat transfer principles and applications, 1st edition, Academic Press, 545.
18. Park, Y. G., Yoon, H. S., & Ha, M. Y. (2012). Natural convection in square enclosure with hot and cold cylinders at different vertical locations. International Journal of Heat and Mass Transfer, 55(25-26), 7911-7925.
19. Aydin, O., Ünal, A., & Ayhan, T. (1999). Natural convection in rectangular enclosures heated from one side and cooled from the ceiling. International journal of heat and mass transfer, 42(13), 2345-2355.
20. Barakos, G., Mitsoulis, E., & Assimacopoulos, D. O. (1994). Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions. International journal for numerical methods in fluids, 18(7), 695-719.

1. Drag and Lift forces [↑](#footnote-ref-1)
2. Finite Element Method [↑](#footnote-ref-2)
3. Finite Difference Method [↑](#footnote-ref-3)
4. Finite Volume Method [↑](#footnote-ref-4)
5. Lattice Boltzmann Method [↑](#footnote-ref-5)
6. Lattice gas automata [↑](#footnote-ref-6)
7. Computational Fluid Dynamics [↑](#footnote-ref-7)
8. Cavitation [↑](#footnote-ref-8)
9. Relaxation Factor [↑](#footnote-ref-9)
10. Maxwell-Boltzmann [↑](#footnote-ref-10)
11. Advection-Diffusion [↑](#footnote-ref-11)
12. Navier-Stokes [↑](#footnote-ref-12)
13. Passive Field [↑](#footnote-ref-13)
14. Thermal Flow [↑](#footnote-ref-14)
15. Boussinesq Approximation [↑](#footnote-ref-15)
16. Rayleigh-Benard Convection [↑](#footnote-ref-16)
17. Rayleigh Number [↑](#footnote-ref-17)
18. Chapman-Enskog [↑](#footnote-ref-18)
19. Bounce Back [↑](#footnote-ref-19)
20. Neumann Boundaries [↑](#footnote-ref-20)
21. Dirichlet Boundaries [↑](#footnote-ref-21)
22. Yoshino and Inamuro [↑](#footnote-ref-22)
23. Weight Factor [↑](#footnote-ref-23)
24. Similarity Law [↑](#footnote-ref-24)
25. Collision Step [↑](#footnote-ref-25)
26. Streaming Step [↑](#footnote-ref-26)
27. Bounce Back [↑](#footnote-ref-27)
28. Reynolds Number [↑](#footnote-ref-28)
29. Prandtl Number [↑](#footnote-ref-29)
30. Eckert Number [↑](#footnote-ref-30)